

# 低重力环境四足机器人虚拟仿真实验平台 教学指导书

重庆大学航空航天学院

# 目 录

<b>1</b>	<b>基本介绍 .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>实验内容及流程 .....</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>虚拟仿真模型介绍 .....</b>	<b>3</b>
3.1	机器人构型介绍 .....	3
3.1.1	实际模型 .....	3
3.1.2	简化模型 .....	4
3.2	输入条件设置 .....	6
3.2.1	材料 .....	6
3.2.2	仪器质量 .....	7
3.2.3	仪器布局 .....	7
3.2.4	机器人机架尺寸 .....	9
3.2.5	机器人腿部尺寸 .....	10
3.2.6	地形坡度参数 .....	13
3.3	符号的物理意义 .....	13
<b>4</b>	<b>质量分配与质心计算 .....</b>	<b>14</b>
4.1	质量计算 .....	14
4.2	质心计算 .....	16
<b>5</b>	<b>运动学分析 .....</b>	<b>18</b>
5.1	坐标变换方法 .....	18
5.2	机器人的初始姿态 .....	19
5.3	机器人运动阶段的划分 .....	20
5.4	参数表 .....	20
5.5	机器人运动规划 .....	21
5.5.1	确定机器人所处阶段及相位 .....	21
5.5.2	目标调整位置的规划 .....	22
5.5.3	运动轨迹规划 .....	25
5.5.4	得到机体坐标系下的髋关节-足端的向量矩阵 .....	30

5.5.5	逆运动学求解作为驱动输入变量的关节转角.....	30
5.6	以转角为输入变量求各点的坐标.....	32
5.6.1	推导相关向量矩阵和旋转矩阵.....	32
5.6.2	支撑相下各点的坐标.....	34
5.6.3	摆动相下各点的坐标.....	35
5.6.4	计算大腿连杆及小腿连杆的质心坐标.....	35
<b>6</b>	<b>稳定性分析.....</b>	<b>36</b>
6.1	零力矩点的概念.....	36
6.2	具体操作说明.....	38
6.2.1	推导零力矩点 P 的位置.....	38
6.2.2	推导一周期内的平均稳定裕度.....	38
<b>7</b>	<b>动力学分析.....</b>	<b>44</b>
7.1	基本理论.....	44
7.1.1	动能定理.....	44
7.1.2	虚功原理.....	44
7.1.3	拉格朗日方程.....	44
7.2	状态切换表.....	44
7.3	摆动足.....	45
7.3.1	大腿 MN 的动能和势能分别为.....	46
7.3.2	小腿 NP 的动能和势能: .....	46
7.3.3	拉格朗日量: .....	47
7.3.4	力矩: .....	47
7.4	支撑足.....	48
7.4.1	三足支撑状态.....	48
7.4.2	四足支撑状态.....	50
<b>8</b>	<b>综合评分.....</b>	<b>53</b>

# 四足机器人运动学与动力学虚拟仿真实验

## 1 基本介绍

在面向新工科的未来工程教育培养理念下，强调面向复杂工程问题的实践能力培养，鼓励在教学过程中融入一些专业课程中的案例，实现贯穿全过程的实践能力培养体系，以提升工科本科生的工程能力和工程素质。

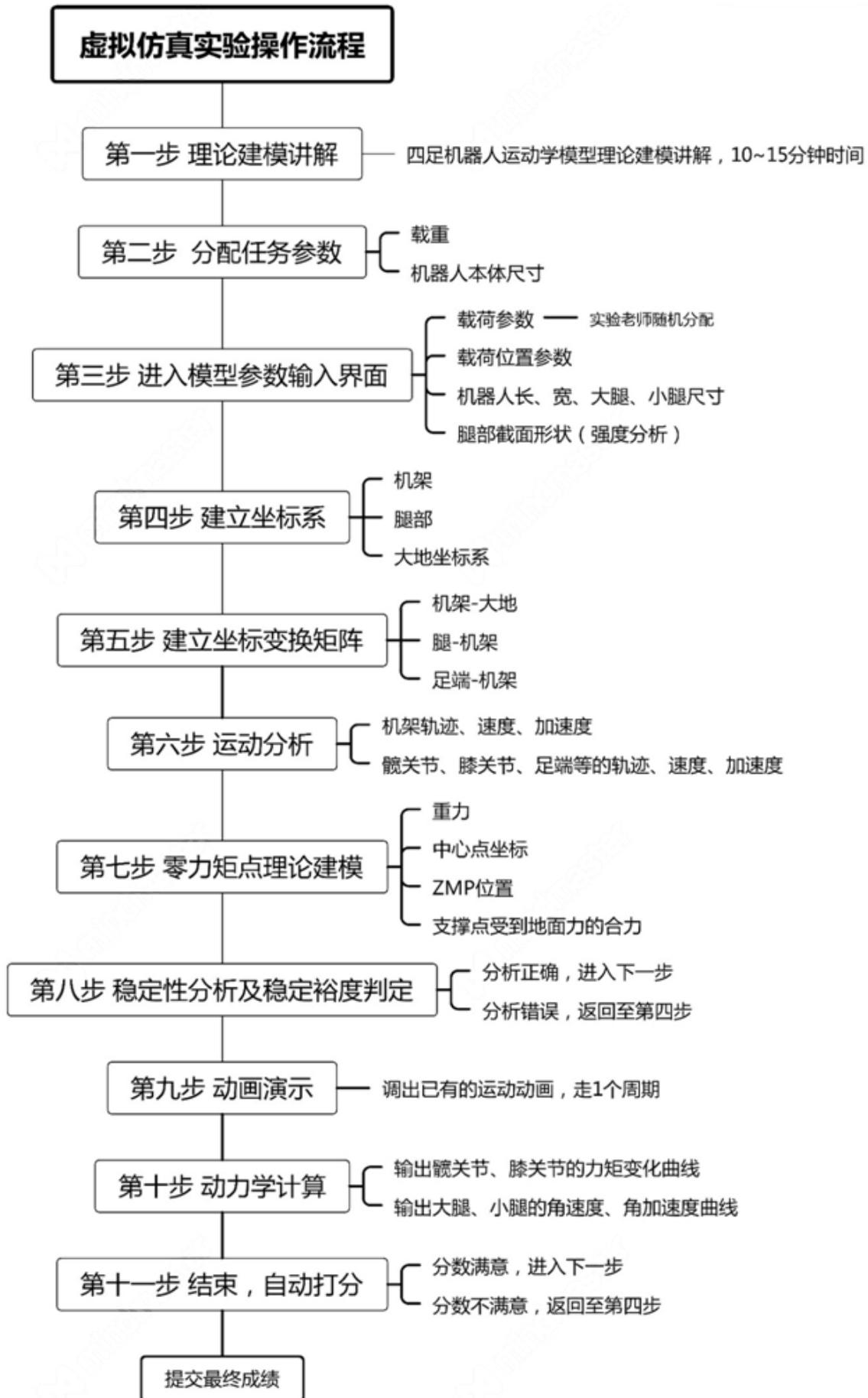
本实验教学项目在“理论力学”课程的基础上，将理论力学理论与机器人学相结合，两者相辅相成，使学生充分了解静力学、刚体运动学和动力学等重要经典力学知识在机器人中的应用，研究各个知识点的特点，加深对理论力学的认识，拓展学生的知识面，锻炼应用理论知识分析实际问题的能力，培养了工程意识和能力。

地外天体探测四足机器人行走稳定性虚拟仿真实验是将力学课程设计成一个实验，激发学生的好奇心，学生在研究机器人行走稳定性时，同时接触到所涉及的众多力学知识。考虑到在地面无法长时间模拟真实的低重力环境，为了让学生了解低重力环境下机器人的运动状态、运动效果，特设计本实验课程，以便让学生对所学的知识有更加深入的理解。

## 2 实验内容及流程

本实验以虚拟的四足机器人为实验对象，在虚拟的低重力实验场景下，通过引导性学习，让学生学习坐标变换方法、零力矩点原理，巩固刚体速度加速度的求解方法、质心计算方法、动能定理、虚功原理、拉格朗日方程等理论力学的关键知识点。进而，以低重力场景下四足机器人爬坡运动及爬坡过程的稳定性判断为主线，四足机器人采用 1+3 步态，步态规划包括支撑腿规划与摆动腿规划。

摆动相规划是为了支腿移动到目标落地点和跨越障碍，基于摆动相足端运动轨迹，通过支腿运动学，求出摆动腿关节空间变化；支撑相规划是为了实现机体位姿调整和整机移动，基于机身的运动轨迹，通过机身运动学，求出支撑腿关节空间变化。在分析机器人稳定性时采用零点力矩法，研究机器人支撑相支腿能否保证机器人稳定。四足机器人的步态规划和稳定性分析涉及到众多学科知识，如理论力学、线性代数等，通过本实验教学，学生能多方位提升自己对这些学科知识的理解力与运用能力。

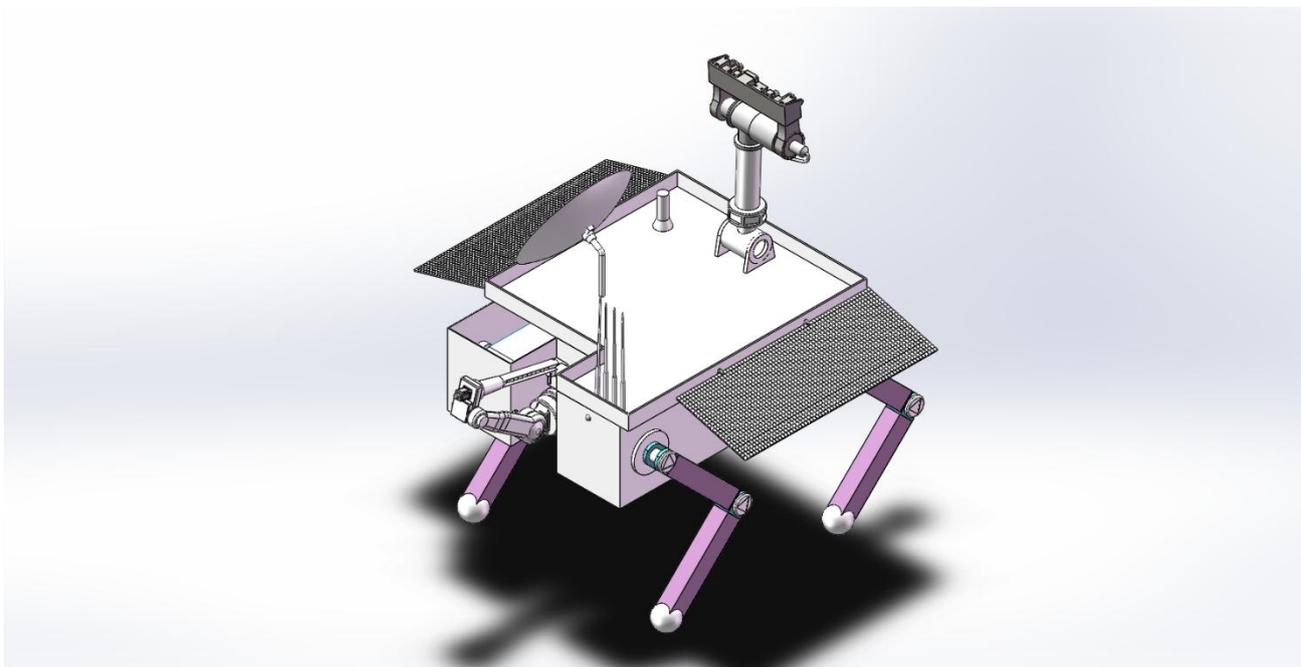


### 3 虚拟仿真模型介绍

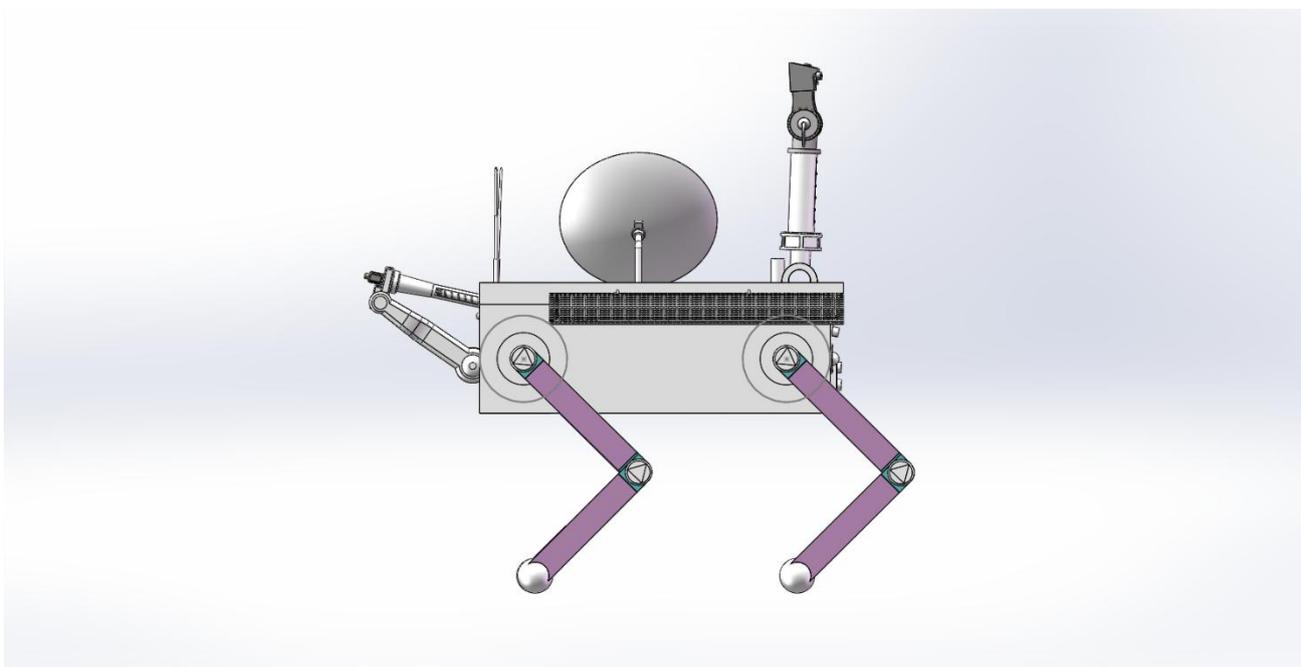
#### 3.1 机器人构型介绍

##### 3.1.1 实际模型

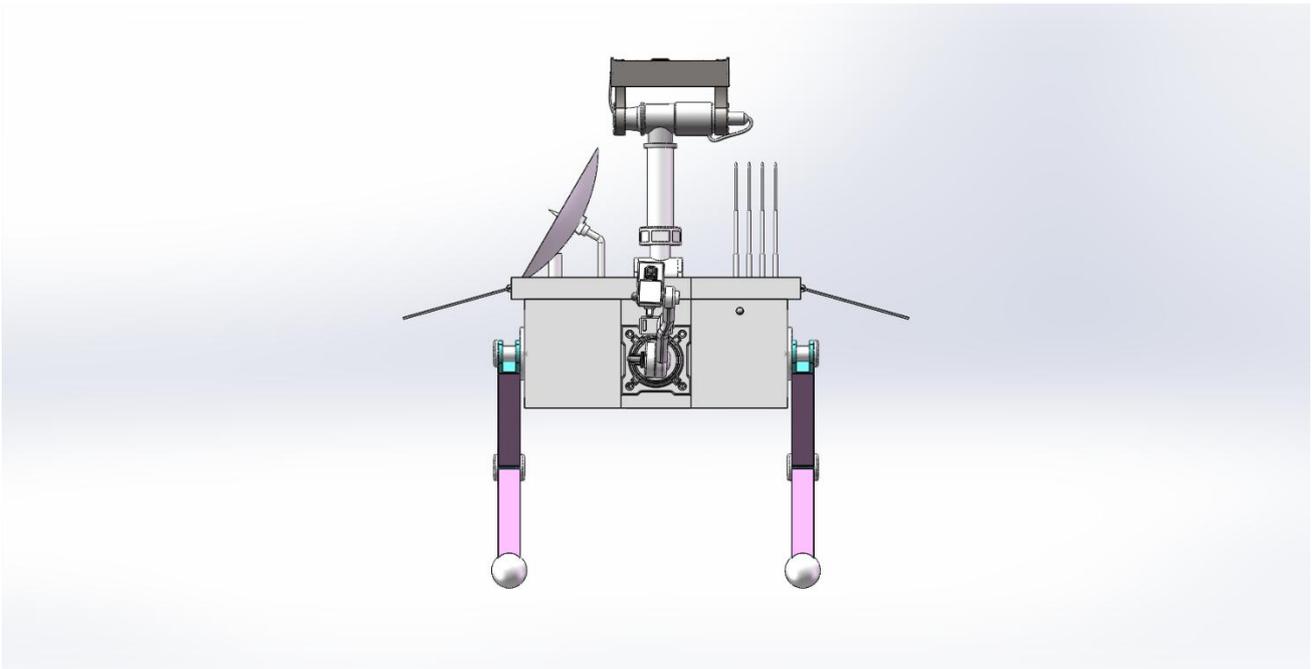
该机器人为八自由度四足机器人，实际模型如下



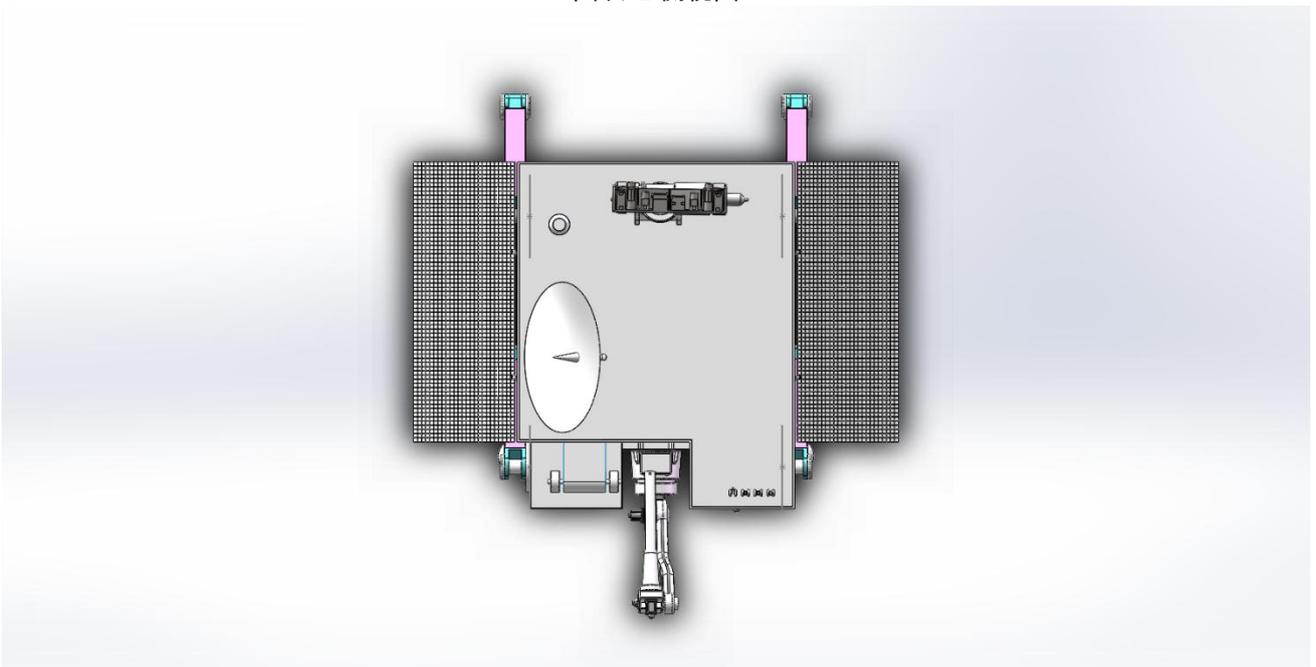
该四足机器人的三视图如下



图表 1 正视图



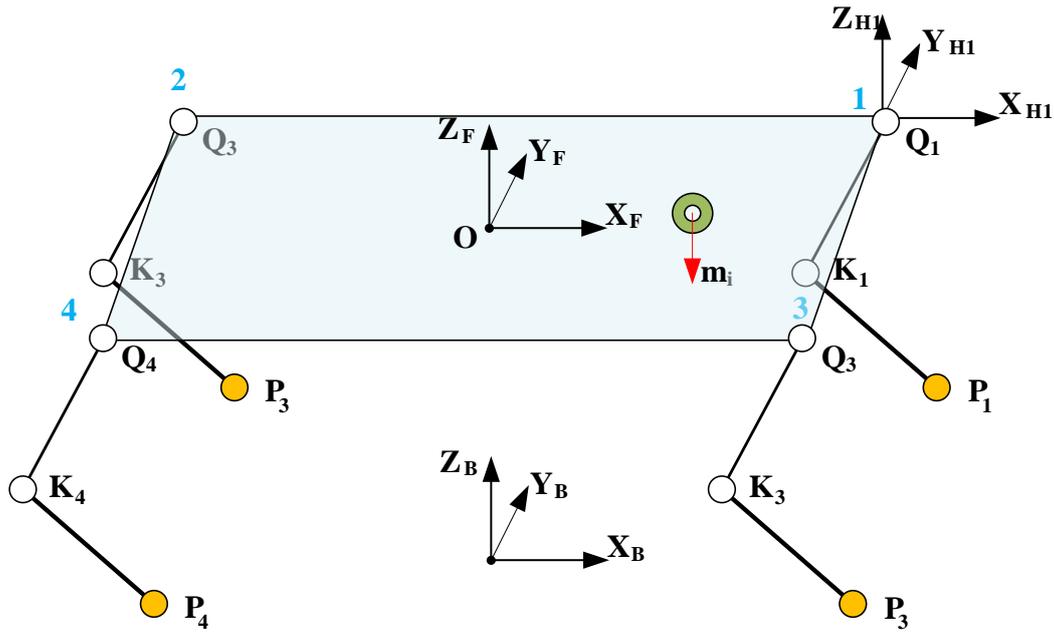
图表 2 侧视图



图表 3 俯视图

### 3.1.2 简化模型

下图中的所有标注都要在三维模型里面对应位置体现。

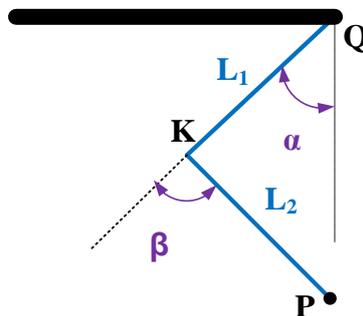


### 符号意义

- (1) 将机器人的左前肢、左后肢、右前肢、右后肢依次编号为 1、2、3、4
- (2) 四足机器人模型上， $O$ 点表示机架的几何中心， $Q_i$ 点表示对应腿的髋关节结点， $K_i$ 点表示对应腿的膝关节结点， $P_i$ 点表示对应腿的足端
- (3) 将机体坐标系相对于世界坐标系的三个姿态角 $Roll$ ， $pitch$ ， $Yaw$ 分别简化表示为 $R$ ， $P$ ， $Y$ （其中的 $R, P$ 在推导中的意义根据具体情况而定）

### 结构参数

- (1) 机器人具有 8 自由度，即每条腿分别有 2 个自由度，分别在髋关节和膝关节上
- (2) 机器人机架长度为 $l$ ，宽度为 $w$ ，大腿连杆长度为 $L_1$ ，小腿连杆长度为 $L_2$
- (3) 各腿的髋关节转角为 $\alpha_i$ ，初始值均为  $45^\circ$ ；膝关节转角为 $\beta_i$ ，初始值均为  $-90^\circ$



髋关节转角的基准线（角度为零处）固连在机器人机架的髋关节处（注意是机架端），该基准线始终与机架保持  $90^\circ$  的垂直关系，规定大腿连杆绕髋关节顺时针旋转时转角为正，逆时针旋转时转角为负；

膝关节转角的基准线（角度为零处）固连在大腿连杆的膝关节处（注意是大腿连杆端），

该基准线始终与大腿连杆保持平行关系，规定小腿连杆绕髋关节顺时针旋转时转角为正，逆时针旋转时转角为负；

### 建立坐标系

(1) 世界坐标系 $\Sigma B$ 。坐标系固定在大地上， $X_B$ 指向机器人初始时刻水平前向方向， $Y_B$ 指向机器人初始时刻水平向左， $Z_B$ 竖直向上

(2) 机体坐标系 $\Sigma F$ 。坐标系固定在机器人机架的几何中心， $X_F$ 平行于机架且指向机器人前向方向， $Y_F$ 平行于机架且指向机器人的左侧， $Z_F$ 垂直于机架向上

(3) 腿部坐标系 $\Sigma Hi$ 。坐标系固定在机器人机架的髋关节，坐标轴平行于机体坐标系 $\Sigma B$ 其中 $i = 1,2,3,4$

### 坐标系间的变换关系

机体坐标系 $\Sigma F$ 到世界坐标系 $\Sigma B$ 的变换矩阵可表示为

$${}^B_F T = \mathbf{trans}(X_B, {}^B x_o) \cdot \mathbf{trans}(Y_B, {}^B y_o) \cdot \mathbf{trans}(Z_B, {}^B z_o) \cdot \mathbf{Rot}(Z_B, Y) \cdot \mathbf{Rot}(Y_B, P) \cdot \mathbf{Rot}(X_B, R)$$

腿部坐标系 $\Sigma Hi$ 到机体坐标系 $\Sigma F$ 的变换矩阵可表示为

$${}^F_{Hi} T = \mathbf{trans}(X_F, {}^F x_{Q_i}) \cdot \mathbf{trans}(Y_F, {}^F y_{Q_i})$$

### 运动变量初始值 (t=0 时刻)

(1) 机架姿态角分别为 $R_0, P_0, Y_0$

(2) 机架的几何中心 $O$ 在世界坐标系 $\Sigma B$ 下的坐标为 ${}^B O = [{}^B x_{O0} \quad {}^B y_{O0} \quad {}^B z_{O0}]^T$

(3) 足端 $P_i$ 在世界坐标系 $\Sigma B$ 下的坐标为 ${}^B P_i = [{}^B x_{P_i0} \quad {}^B y_{P_i0} \quad {}^B z_{P_i0}]^T$

## 3.2 输入条件设置

### 3.2.1 材料

共设置四种材料可供学生选择，材料名称及物理特性见下表所示

材料名称	材料密度 $\rho$
钢	7980kg/m <sup>3</sup>
铝合金	2700kg/m <sup>3</sup>
钛合金	4730kg/m <sup>3</sup>
塑料	1300kg/m <sup>3</sup>

### 3.2.2 仪器质量

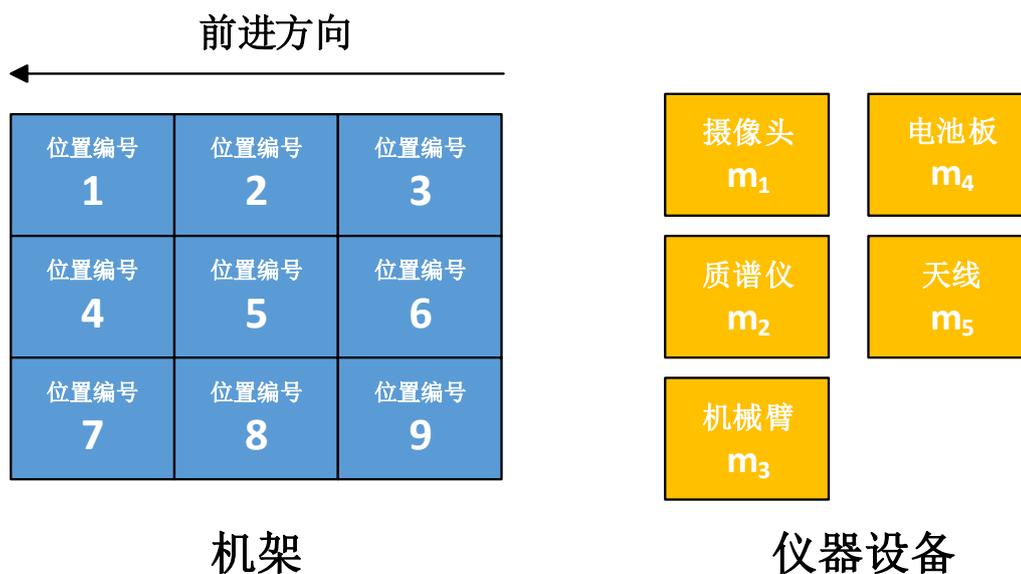
共设置五种仪器供学生进行挑选，仪器名称及相应的仪器质量见下表所示

仪器名称	仪器质量 $m_i$
摄像头	3kg
质谱仪	5kg
机械臂	20kg
太阳能电池板	12kg
无线电天线	15kg

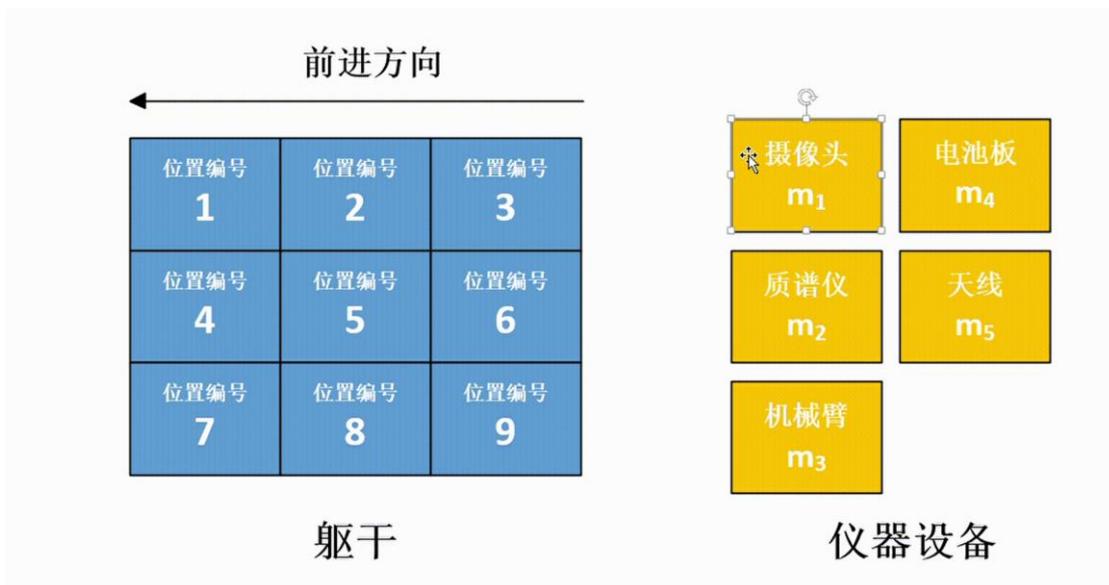
( $i = 1,2,3,4,5$  代表不同仪器的质量编号)

### 3.2.3 仪器布局

用户操作界面可设计如下图所示



用户的实际操作演示如下



用户最终放置的结果可以如下

例①:

位置编号 1	质谱仪 $m_2$	位置编号 3
摄像头 $m_1$	电池板 $m_4$	天线 $m_5$
位置编号 7	机械臂 $m_3$	位置编号 9

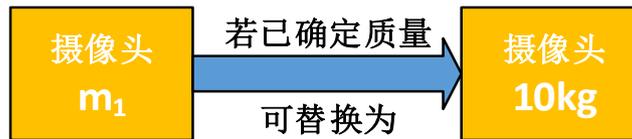
机架（施加载荷后）

例②(可不必将仪器全部放置，但至少放置3个):

质谱仪 $m_2$	位置编号 2	位置编号 3
位置编号 4	摄像头 $m_1$	位置编号 6
机械臂 $m_3$	位置编号 8	位置编号 9

机架（施加载荷后）

之后若确定各仪器设备的具体质量，可用具体质量代替符号“ $m_1$ ”、“ $m_2$ ”、……“ $m_5$ ”



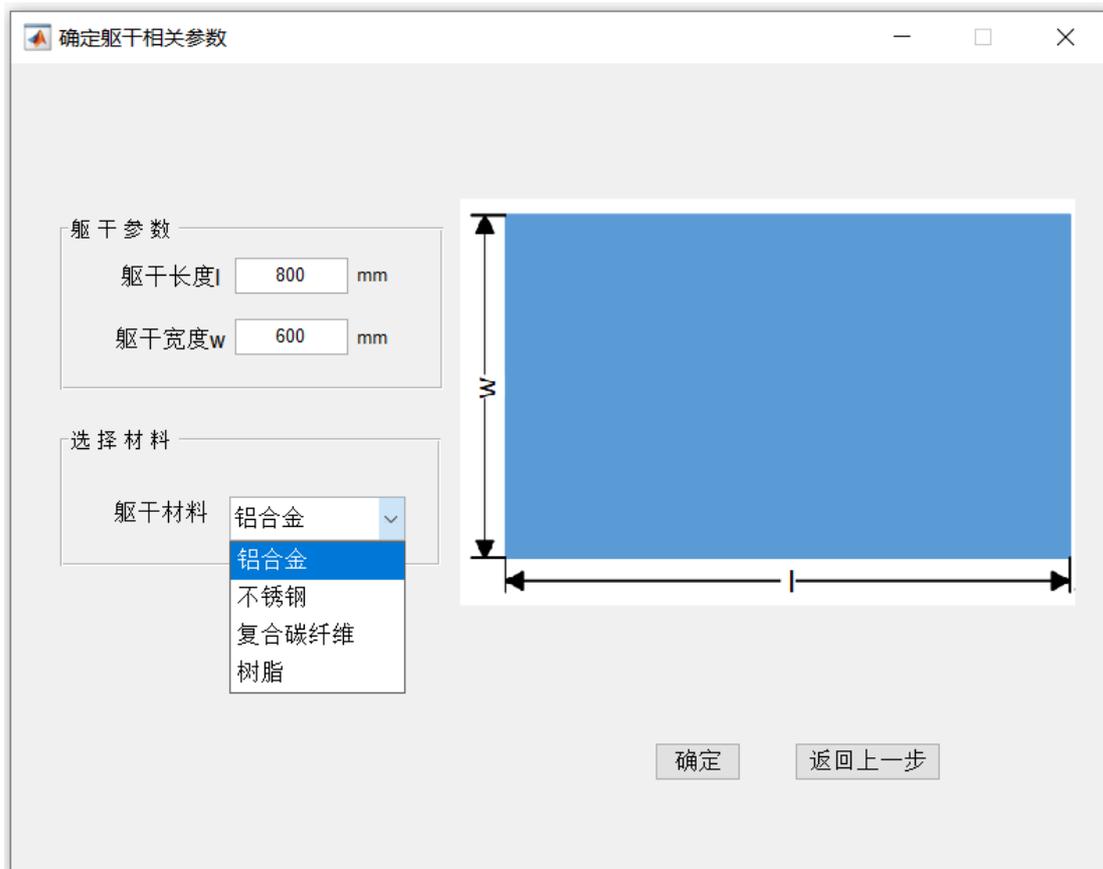
### 3.2.4 机器人机架尺寸

为完全确定机架尺寸，学生需设置机架长度 $l$ 、机架宽度 $w$ 、机架厚度 $d$ 、机架材料（钢、铝合金、钛合金、塑料）（机架材料决定机架密度 $\rho_1$ ）等参数。其中机架宽度 $d$ 为系统方提前设置的参数，一般取 $d = 5mm$ 。

设置机架尺寸的取值范围

	取值范围
机架长度 $l$	600~1200mm
机架宽度 $w$	400~800mm

用户操作界面可设计如下（注意：部分名词有变化）

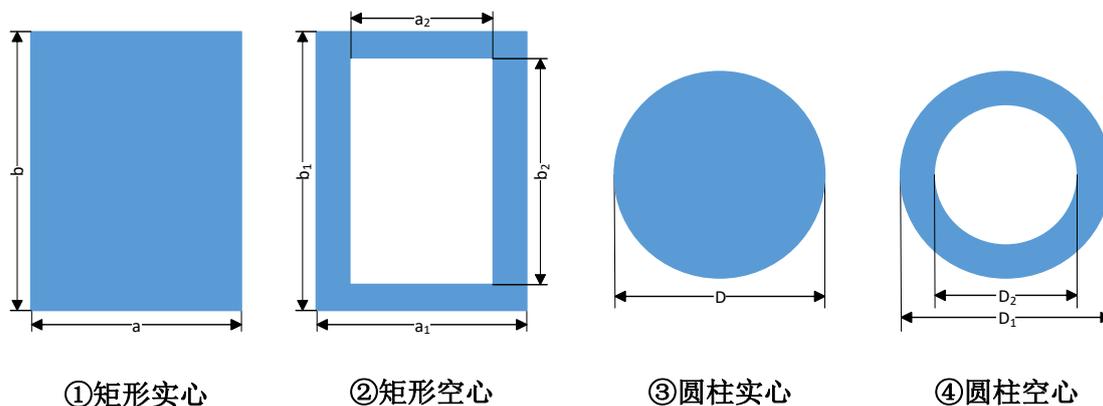


### 3.2.5 机器人腿部尺寸

#### 3.2.5.1 腿部截面形状

共设置四种腿部截面形状供学生选择，截面形状及相应名称如下图所示

### 选择腿部截面形状

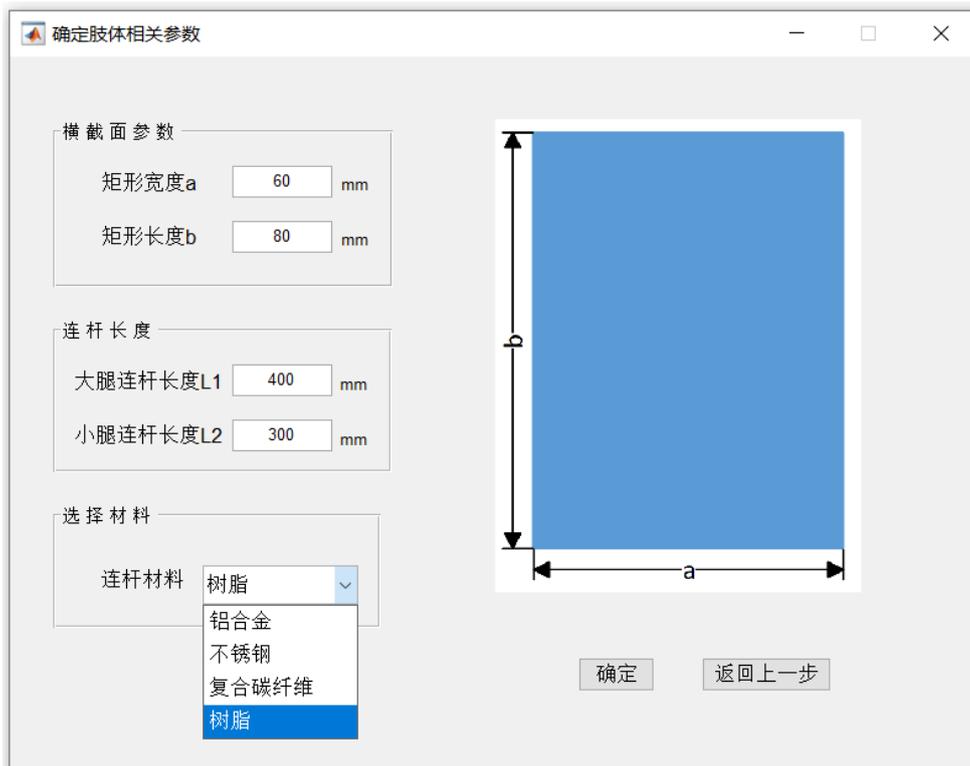


#### 3.2.5.2 腿部长度参数

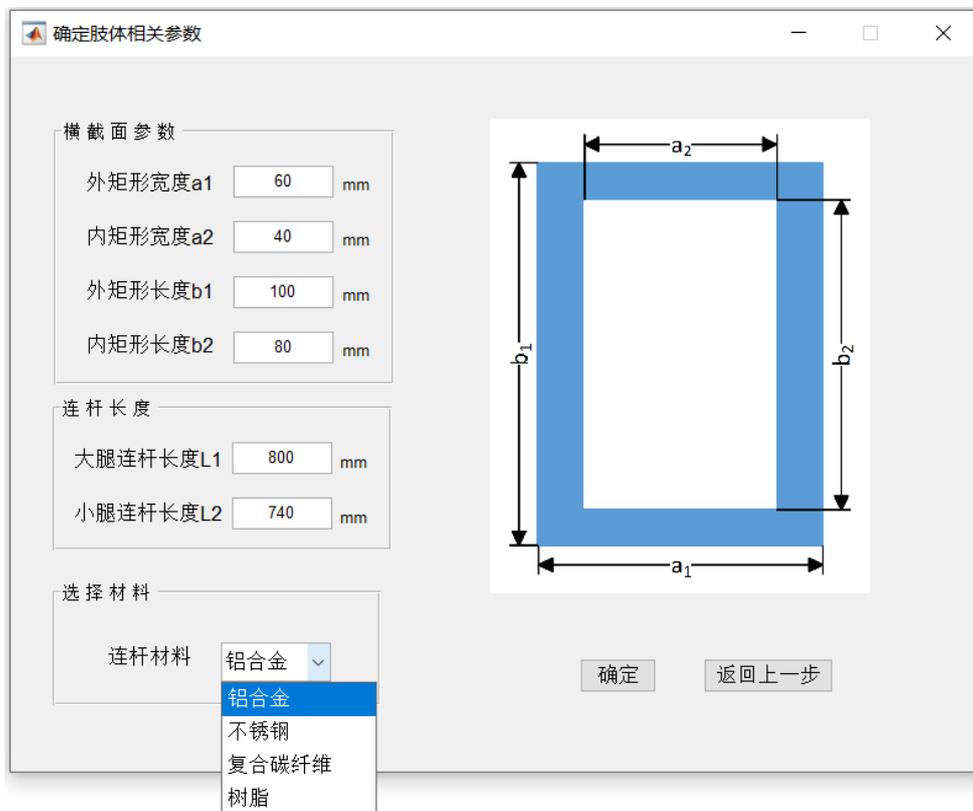
设置腿部连杆长度的取值范围

	取值范围
大腿连杆长度 $L_1$	320~420mm
小腿连杆长度 $L_2$	360~480mm

①若学生选择的是矩形实心截面，需要设置的参数有矩形宽度 $a$ 、矩形长度 $b$ 、大腿连杆长度 $L_1$ 、小腿连杆长度 $L_2$ 、连杆材料（连杆材料决定连杆密度 $\rho_2$ ）

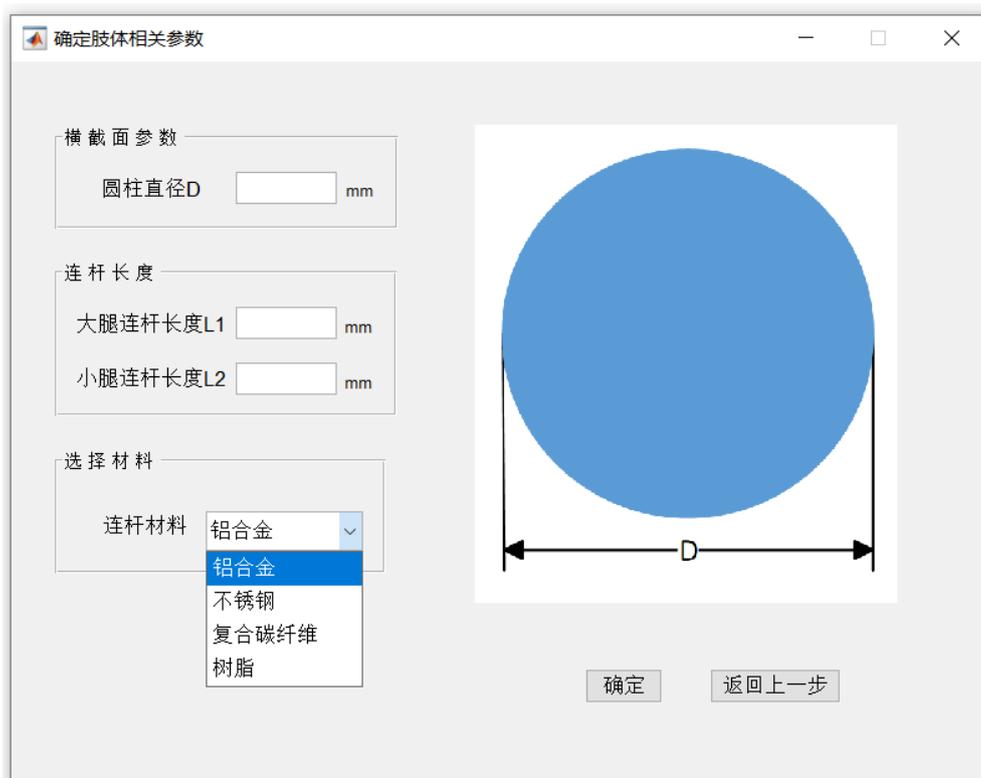


②若学生选择的是矩形空心截面，需要设置的参数有外矩形宽度 $a_1$ 、内矩形宽度 $a_2$ 、外矩形长度 $b_1$ 、内矩形长度 $b_2$ 、大腿连杆长度 $L_1$ 、小腿连杆长度 $L_2$ 、连杆材料（连杆材料决定连杆密度 $\rho_2$ ）

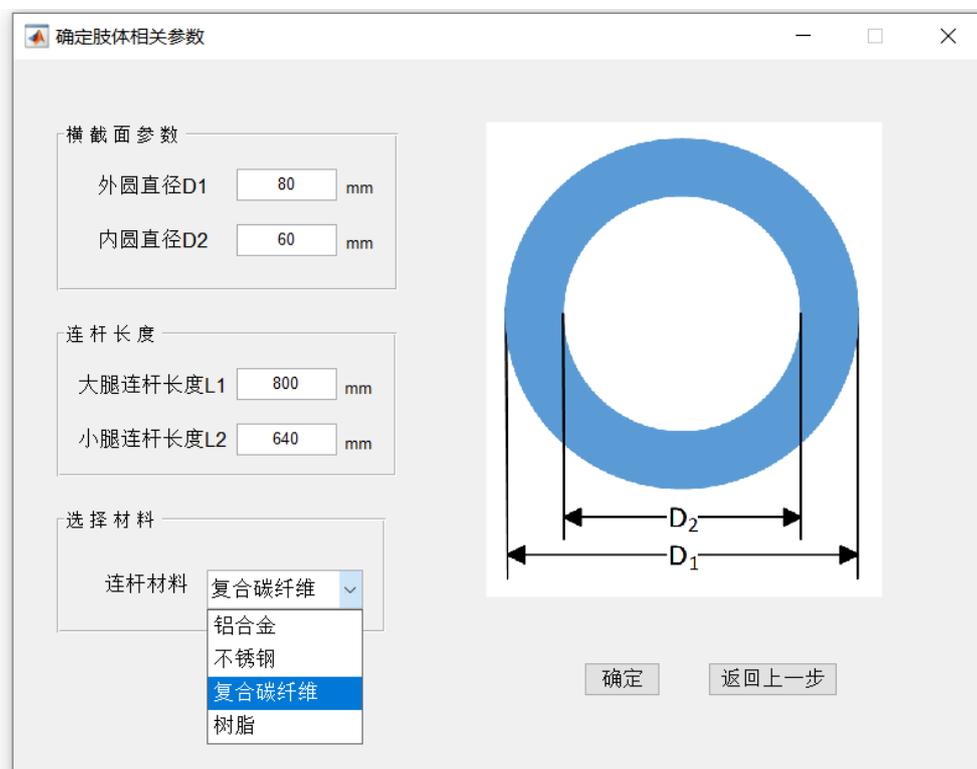


③若学生选择的是圆柱实心截面，需要设置的参数有圆柱直径 $D$ 、大腿连杆长度 $L_1$ 、小腿

连杆长度 $L_2$ 、连杆材料（连杆材料决定连杆密度 $\rho_2$ ）



④若学生选择的是圆柱空心截面，需要设置的参数有外圆直径 $D_1$ 、内圆直径 $D_2$ 、大腿连杆长度 $L_1$ 、小腿连杆长度 $L_2$ 、连杆材料（连杆材料决定连杆密度 $\rho_2$ ）



### 3.2.6 地形坡度参数

设置坡度 $\theta$ 选择范围为  $0\sim 30^\circ$ ，学生可在此范围内任意取值

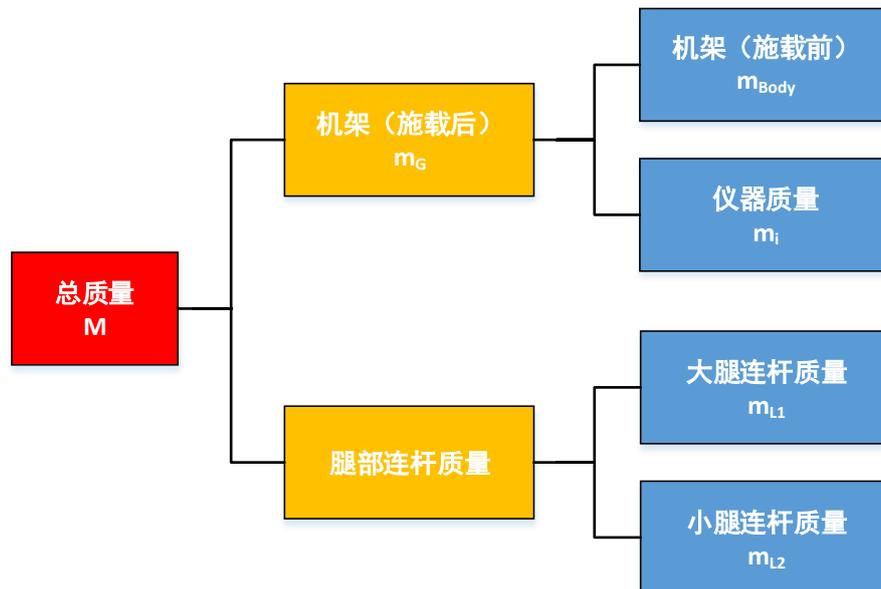
(这里的坡度是一个角度，而不是正切值)

### 3.3 符号的物理意义

$l$	机架长度
$w$	机架宽度
$d$	机架厚度
$\rho_1$	机架材料密度
$\rho_2$	腿部连杆材料密度
$L_1$	大腿连杆长度
$L_2$	小腿连杆长度
$S$	腿部横截面积；稳定裕度
$T_{su}$	支撑相持续时间
$T_{sw}$	摆动相持续时间
$k_T$	两相持续时间之比
$L$	腿部连杆总长；拉格朗日量
$S_x$	期望的迈步距离
$H$	期望的机架高度
$h_{max}$	期望的抬腿高度
$k_h$	抬腿高度系数
$k_S$	迈步距离系数
$a_1$	抬腿阶段时间系数
$a_2$	落腿阶段时间系数
$K$	系统的动能
$P$	系统的势能；足端

## 4 质量分配与质心计算

### 4.1 质量计算



该四足机器人质量主要来源于包含机架（施加载荷前）质量 $m_{Body}$ ，仪器质量 $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ )，大腿连杆质量 $m_{L1}$ 和小腿连杆质量 $m_{L2}$ ，合计总质量 $M$ 为：

$$M = m_G + 4(m_{L1} + m_{L2})$$

#### ① 机架（施加载荷后）的质量

待求变量：机架（施加载荷后）的质量  $m_G$

所需参数：① 仪器设备质量  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $m_4$ 、 $m_5$

② 机架宽度  $w$ （由用户直接输入获得）

③ 机架厚度  $d$ （提前确定，取  $d = 5\text{mm}$ ）

④ 机架长度  $l$ （由用户直接输入获得）

⑤ 机架密度  $\rho_1$ （由所选材料确定，而所选材料由用户选择得到）

推导：

① 首先计算机架（施加载荷前）质量  $m_{Body}$

$$m_{Body} = \rho_1 l w d$$

② 再将机架质量和仪器设备的质量进行加和，得到机架（施加载荷后）的质量  $m_G$

$$m_G = m_{Body} + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)$$

#### ② 大腿连杆&小腿连杆的质量

待求变量：① 大腿连杆的质量  $m_{L1i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$  分别代表四条大腿连杆)

②小腿连杆的质量 $m_{L_2i}$  ( $i = 1,2,3,4$  分别代表四条小腿连杆)

所需参数: ①大腿连杆的长度 $L_1$  (由用户直接输入获得)

②大腿连杆的长度 $L_2$  (由用户直接输入获得)

③连杆密度 $\rho_2$  (由所选材料确定, 而所选材料由用户选择得到)

④不同截面的相关长度参数 (由用户直接输入获得)

截面形状	长度参数
矩形实心	矩形宽度 $a$
	矩形长度 $b$
矩形空心	外矩形宽度 $a_1$
	内矩形宽度 $a_2$
	外矩形长度 $b_1$
	内矩形长度 $b_2$
圆柱实心	圆柱直径 $D$
圆柱空心	外圆直径 $D_1$
	内圆直径 $D_2$

推导:

①计算腿部截面积 (大腿连杆和小腿连杆共用, 由下列表格中的公式确定)

截面形状	截面积公式 $S$
矩形实心	$S = ab$
矩形空心	$S = a_1b_1 - a_2b_2$
圆柱实心	$S = \frac{1}{4}\pi D^2$
圆柱空心	$S = \frac{1}{4}\pi(D_1^2 - D_2^2)$

②计算大腿连杆的质量

$$m_{L_1i} = \rho_2SL_1$$

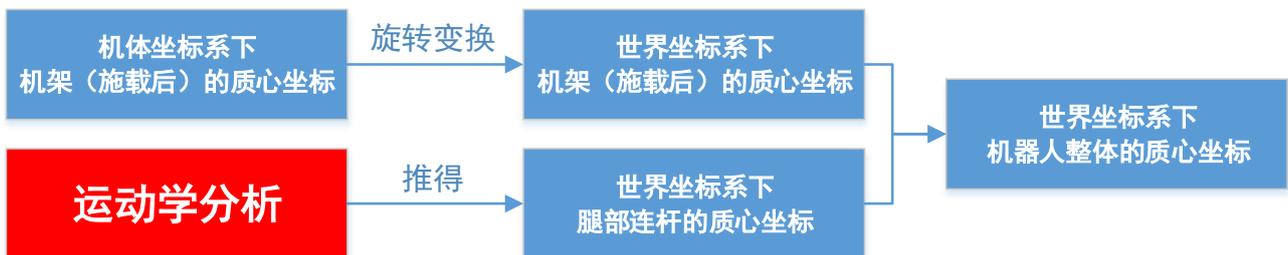
③计算小腿连杆的质量

$$m_{L_2i} = \rho_2SL_2$$

## 4.2 质心计算

设空间中有 $n$ 个质点，分别位于 $(x_i, y_i, z_i)$ ，其质量分别为 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，该质点系的质心坐标为

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{cases}$$



步骤①：求机架（施加载荷后）在机体坐标系 $\Sigma F$ 下的质心坐标

待求变量：机架（施加载荷后）在机体坐标系 $\Sigma F$ 下的质心坐标  ${}^F \mathbf{p}_G = [{}^F x_G \quad {}^F y_G \quad {}^F z_G]$

所需参数：①机架质量 $m_{Body}$

②仪器设备质量 $m_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$

③机架的几何中心在机体坐标系 $\Sigma F$ 下的对应坐标  ${}^F \mathbf{O} = [{}^F x_o \quad {}^F y_o \quad {}^F z_o]$

（提前确定，取 ${}^F x_o = 0, {}^F y_o = 0, {}^F z_o = 0$ ）

④机架各区域位置中心在机体坐标系下的坐标分别为  ${}^F \mathbf{p}_j = [{}^F x_j \quad {}^F y_j \quad {}^F z_j]$ ，

放置在机架各区域位置中心的对应质量分别为 $m_j$ ，其中 $j = 1, 2, \dots, 9$ ，（初始值均为 $m_j = 0$ ），将仪器设备质量 $m_i$ 依照学生选择情况赋予 $m_j$ （参照用户选择的仪器放置位置和下图确定）

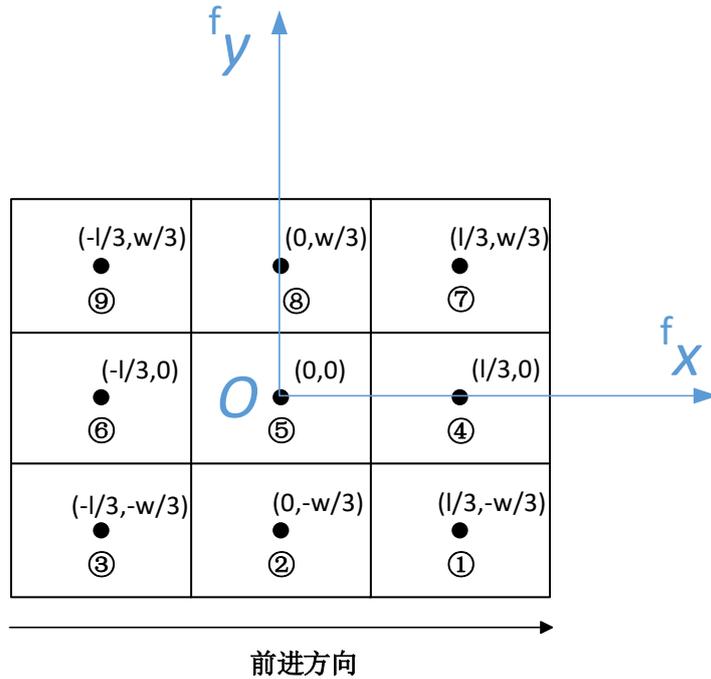


Figure 1 机体坐标系下各位置中心坐标

推导:

$$\begin{cases} {}^F x_G = \frac{m_{Body} {}^F x_O + \sum_j^9 m_j {}^F x_j}{m_{Body} + \sum_j^9 m_j} \\ {}^F y_G = \frac{m_{Body} {}^F y_O + \sum_j^9 m_j {}^F y_j}{m_{Body} + \sum_j^9 m_j} \\ {}^F z_G = \frac{m_{Body} {}^F z_O + \sum_j^9 m_j {}^F z_j}{m_{Body} + \sum_j^9 m_j} \end{cases}$$

步骤②: 求世界坐标系下机器人整体质心随时间的变化轨迹

待求变量: ① 机器人整体的质心在世界坐标系  $\Sigma B$  中随时间的坐标轨迹

$${}^B \mathbf{p}_c = [{}^B x_c(t) \quad {}^B y_c(t) \quad {}^B z_c(t)]$$

所需参数: ① 机架 (施加载荷后) 的总质量  $m_G$

② 机架 (施加载荷后) 在机体坐标系  $\Sigma F$  下的整体质心坐标

$${}^F \mathbf{p}_G = [{}^F x_G \quad {}^F y_G \quad {}^F z_G]$$

③ 大腿连杆的质量  $m_{L_1 i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$  分别代表四条大腿连杆)

④ 小腿连杆的质量  $m_{L_2 i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$  分别代表四条小腿连杆) ⑤ ⑤ 大腿连杆质心在世界坐标系  $\Sigma B$  中随时间的坐标轨迹

$${}^B \mathbf{p}_{L_1 i} = [{}^B x_{L_1 i}(t) \quad {}^B y_{L_1 i}(t) \quad {}^B z_{L_1 i}(t)]$$

⑥小腿连杆质心在世界坐标系中随时间的坐标轨迹

$${}^B\mathbf{p}_{L_2i} = [{}^Bx_{L_2i}(t) \quad {}^By_{L_2i}(t) \quad {}^Bz_{L_2i}(t)]$$

⑦机体坐标系到世界坐标系 $\Sigma B$ 的旋转矩阵 ${}^B_F R$

⑧机体坐标系原点（即机架的几何中心）在世界坐标系 $\Sigma B$ 的坐标

$${}^B\mathbf{O} = [{}^Bx_o(t) \quad {}^By_o(t) \quad {}^Bz_o(t)]$$

推导:

①计算机架及载荷的整体质心在世界坐标系中随时间的坐标轨迹

$$\begin{bmatrix} {}^Bx_G(t) \\ {}^By_G(t) \\ {}^Bz_G(t) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^B_F T \cdot \begin{bmatrix} {}^Fx_G \\ {}^Fy_G \\ {}^Fz_G \\ 1 \end{bmatrix}$$

②计算机器人整体质心在世界坐标系中随时间的坐标轨迹

$$\begin{cases} {}^Bx_c(t) = \frac{m_G {}^Bx_G(t) + \sum_i^4 m_{L_1i} {}^Bx_{L_1i}(t) + \sum_i^4 m_{L_2i} {}^Bx_{L_2i}(t)}{m_G + \sum_i^4 m_{L_1i} + \sum_i^4 m_{L_2i}} \\ {}^By_c(t) = \frac{m_G {}^By_G(t) + \sum_i^4 m_{L_1i} {}^By_{L_1i}(t) + \sum_i^4 m_{L_2i} {}^By_{L_2i}(t)}{m_G + \sum_i^4 m_{L_1i} + \sum_i^4 m_{L_2i}} \\ {}^Bz_c(t) = \frac{m_G {}^Bz_G(t) + \sum_i^4 m_{L_1i} {}^Bz_{L_1i}(t) + \sum_i^4 m_{L_2i} {}^Bz_{L_2i}(t)}{m_G + \sum_i^4 m_{L_1i} + \sum_i^4 m_{L_2i}} \end{cases}$$

## 5 运动学分析

### 5.1 坐标变换方法

空间坐标系 $\Sigma M$ 下坐标到空间坐标系 $\Sigma N$ 下坐标的变换公式为

$$\begin{bmatrix} {}^Nx \\ {}^Ny \\ {}^Nz \\ 1 \end{bmatrix} = {}^N_M T \cdot \begin{bmatrix} {}^Mx \\ {}^My \\ {}^Mz \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^N_M T$ 为空间坐标系 $\Sigma M$ 到空间坐标系 $\Sigma N$ 的变换矩阵，计算公式如下

$${}^N_M T = \mathbf{trans}(z, s_3) \cdot \mathbf{trans}(y, s_2) \cdot \mathbf{trans}(x, s_1) \cdot \mathbf{Rot}(z, Y) \cdot \mathbf{Rot}(y, P) \cdot \mathbf{Rot}(x, R)$$

其中 $\mathbf{trans}$ 为平移矩阵，其中 $\mathbf{Rot}$ 为旋转矩阵，

$$\begin{aligned} \mathbf{trans}(x, s_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Rot}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{trans}(y, s_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Rot}(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{trans}(z, s_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Rot}(z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

## 5.2 机器人的初始姿态

(1) 坡度为零时，各个关键变量的初始值

初始姿态角

$$R_0 = 0,$$

$$P_0 = 0,$$

$$Y_0 = 0.$$

关键点的初始坐标

$${}^B\mathbf{O}_0 = [0 \quad 0 \quad L_1 \cdot \cos\alpha_0 + L_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0)]^T$$

$${}^B\mathbf{P}_{10} = \left[ \frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin\alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad \frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

$${}^B\mathbf{P}_{20} = \left[ -\frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin\alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad \frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

$${}^B\mathbf{P}_{30} = \left[ \frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin\alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad -\frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

$${}^B\mathbf{P}_{40} = \left[ -\frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin\alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad -\frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

(2) 坡度不为零时，各个关键变量的初始值

水平面到坡面的旋转矩阵

$$\mathbf{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

初始姿态角

$$R_0 = 0,$$

$$P_0 = \theta,$$

$$Y_0 = 0.$$

关键点的初始坐标

$${}^B\mathbf{O}_0 = \mathbf{Rot}(\theta) \cdot [0 \quad 0 \quad L_1 \cdot \cos \alpha_0 + L_2 \cos(\alpha_0 + \beta_0)]^T$$

$${}^B\mathbf{P}_{10} = \mathbf{Rot}(\theta) \cdot \left[ \frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin \alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad \frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

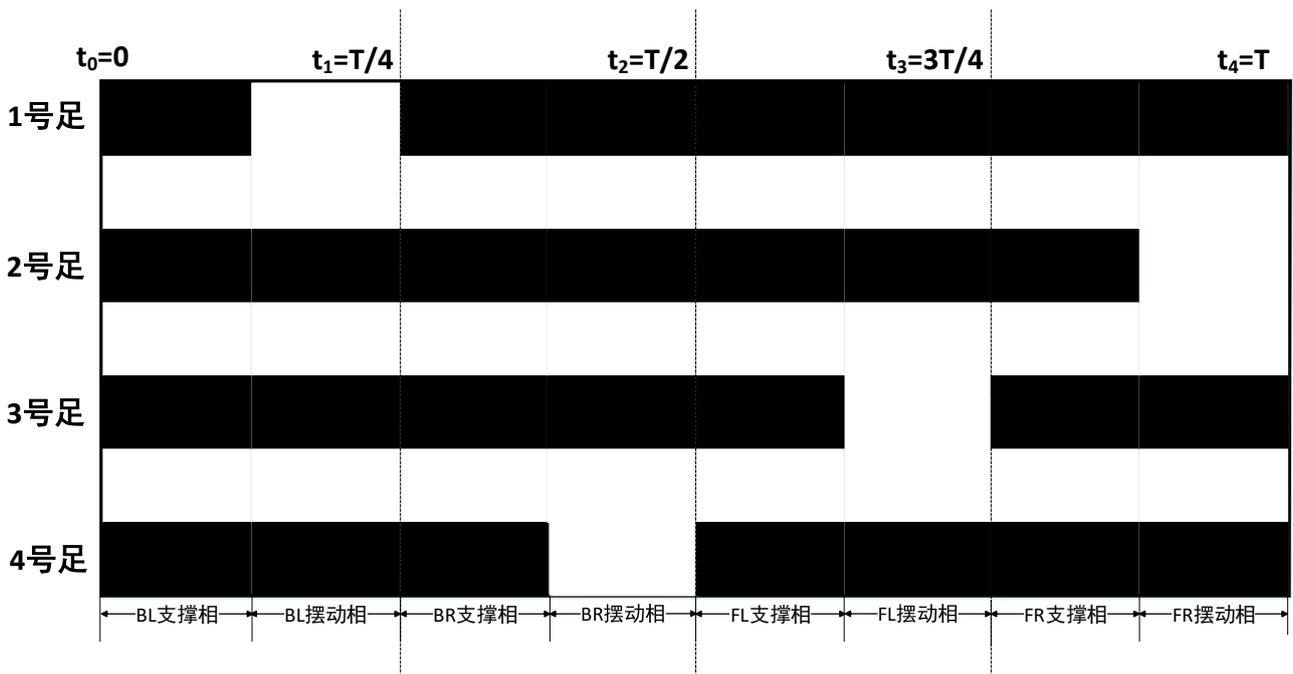
$${}^B\mathbf{P}_{20} = \mathbf{Rot}(\theta) \cdot \left[ -\frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin \alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad \frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

$${}^B\mathbf{P}_{30} = \mathbf{Rot}(\theta) \cdot \left[ \frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin \alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad -\frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

$${}^B\mathbf{P}_{40} = \mathbf{Rot}(\theta) \cdot \left[ -\frac{l}{2} - L_1 \cdot \sin \alpha_0 - L_2 \sin(\alpha_0 + \beta_0) \quad -\frac{w}{2} \quad 0 \right]^T$$

### 5.3 机器人运动阶段的划分

机器人从初始姿态开始运动，运动一周期后停止运动。将机器人有周期的运动分为四个运动阶段，分别为运动阶段 BL、运动阶段 BR、运动阶段 FL、运动阶段 FR，每个运动阶段又可分为两个相位，分别是支撑相和摆动相。机器人的步态时序图可参考下图：



### 5.4 参数表

重要参数介绍及赋值

参数名称	赋值	参数意义
$T$	80s	完整周期

$T_{su}$	10s	支撑相持续时间
$T_{sw}$	10s	摆动相持续时间
$H$	$L_1$	期望躯干高度
$h_{max}$	$L_2/4$	期望抬腿高度
$a_1$	0.5	抬腿阶段时间系数
$a_2$	0.25	落腿阶段时间系数
$k_S$	0.4	迈步距离系数

## 5.5 机器人运动规划

在此章节中，将对机器人所有关键节点（机架的几何中心和四个足端）以及姿态角的运动轨迹进行规划，最后作为驱动电机的关节转角进行输出。由于机器人仅有八自由度，若不发生失稳、倾斜，正常运动，则机器人上所有点在y轴方向的坐标保持不变，因此仅对关键节点的x坐标和z坐标以及机架的俯仰角做规划，其他运动变量保持初始值即可。

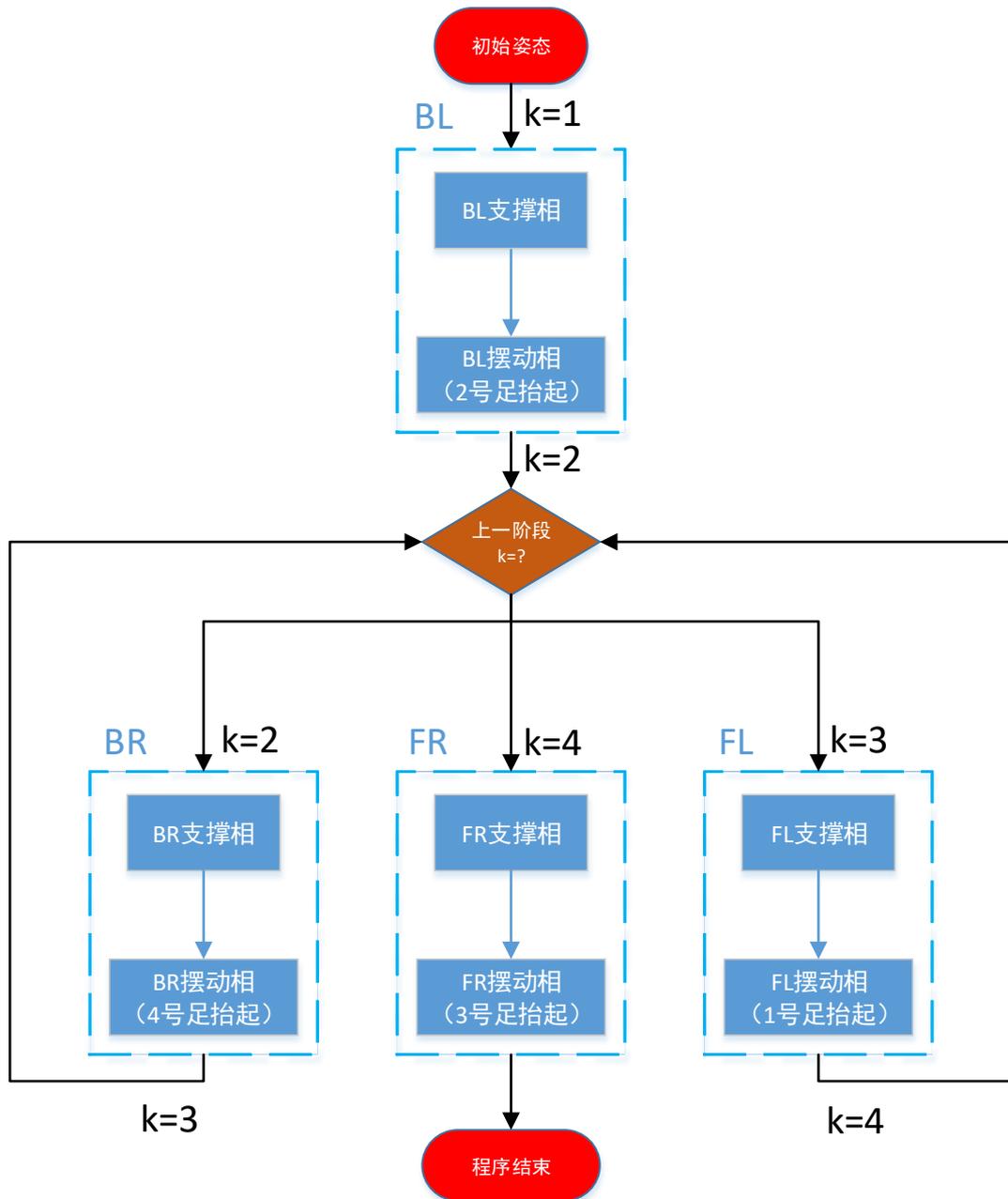
为了尽可能保持机器人运动的稳定性，采取以下策略：

(1) 在不考虑机器人运动效率的情况下，设计机器人的一个周期为 1 个四足支撑相和 1 个单腿摆动相，而且每个摆动相也只是一只腿在摆动，也即在机器人运动的时候，最多有 1 条腿腾空，至少有三条腿与地面保持稳定接触。

(2) 为了避免受力瞬间增大或减小对运动稳定的影响，尽可能采用五次样条曲线连接各个运动变量的初始值和目标值

### 5.5.1 确定机器人所处阶段及相位

①通过判断变量 $k$ 的取值来确定机器人所处的运动阶段；



②通过判断时间  $t$  所在区间来确定机器人所处相位；

$$\begin{cases} \text{支撑相,} & 0 < t \ll T_{su} \\ \text{摆动相,} & T_{su} < t \ll (T_{su} + T_{sw}) \end{cases}$$

## 5.5.2 目标调整位置的规划

### 5.5.2.1 支撑相——机架的目标调整位置

#### 5.5.2.1.1 期望的机架姿态角

##### (1) 俯仰角 (Pitch)

希望机架平板与坡面平齐，设计俯仰角调整角度为：

$$P_D = \theta$$

## (2) 横滚角 (Roll) & 偏航角 (Yaw)

由于机器人没有侧向摆动髋关节，无法在 $y$ 轴方向移动，因此将横滚角、偏航角规划为零

$$R_D = 0$$

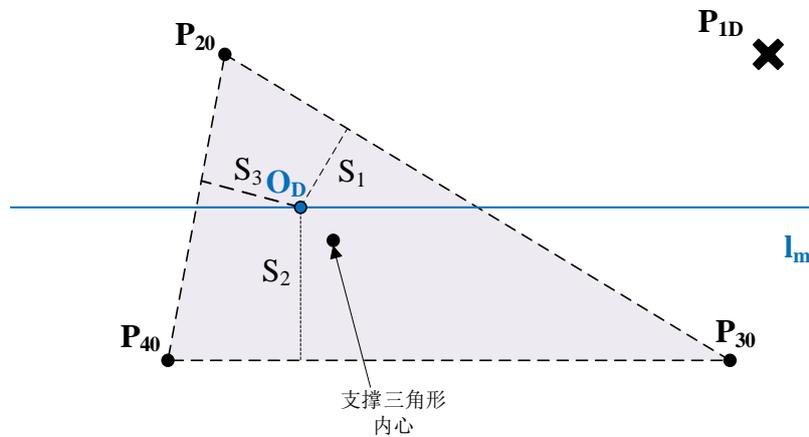
$$Y_D = 0$$

所以目标机体坐标系与固定坐标系之间的旋转矩阵 ${}^B_F R_D$ 为：

$$\begin{aligned} {}^B_F R_D &= \text{Rot}(Z, Y_D) \cdot \text{Rot}(Y, P_D) \cdot \text{Rot}(X, R_D) \\ &= \text{Rot}(Y, P_D) \end{aligned}$$

### 5.5.2.1.2 期望的机架的几何中心落点坐标

(1) 期望的机架的几何中心在水平面上投影的目标调整坐标 ${}^B x_{OD}$ 和 ${}^B y_{OD}$



为保证机器人在不同工况下都按照固定的同一运动轨迹进行运动，此处应规划的是机架的几何中心的目标调整位置。

在世界坐标系 $\Sigma B$ 下，由于机器人无法侧向摆动髋关节，因此机器人在正常行走的情况下，其 $y$ 坐标不发生变化，则有

$${}^B y_{OD} = {}^B y_{O0}$$

而且机架的几何中心在地面的投影随着腿部连杆的摆动只能沿着平行于机器人机架的直线 $l_m$ 移动，直线 $l_m$ 的方程为

$$({}^B x_{P_1} - {}^B x_{P_2}) \cdot ({}^B y - {}^B y_{O0}) - ({}^B y_{P_1} - {}^B y_{P_2}) \cdot ({}^B x - {}^B x_{O0}) = 0$$

因此沿直线 $l_m$ 在支撑三角形内部寻找一点使得非线性函数

$$S = \sqrt{(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2}$$

取得最小值，则水平面上此点的 $x$ 坐标即为机架的几何中心在支撑相的目标调整坐标的 ${}^B x_{OD}$

补充：其中 $S_1, S_2, S_3$ 为该点到支撑三角形三边的距离。

例子：若支撑三角形的顶点坐标分别为 $P_{10}({}^B x_{P_{10}}, {}^B y_{P_{10}})$ ,  $P_{20}({}^B x_{P_{20}}, {}^B y_{P_{20}})$ 和

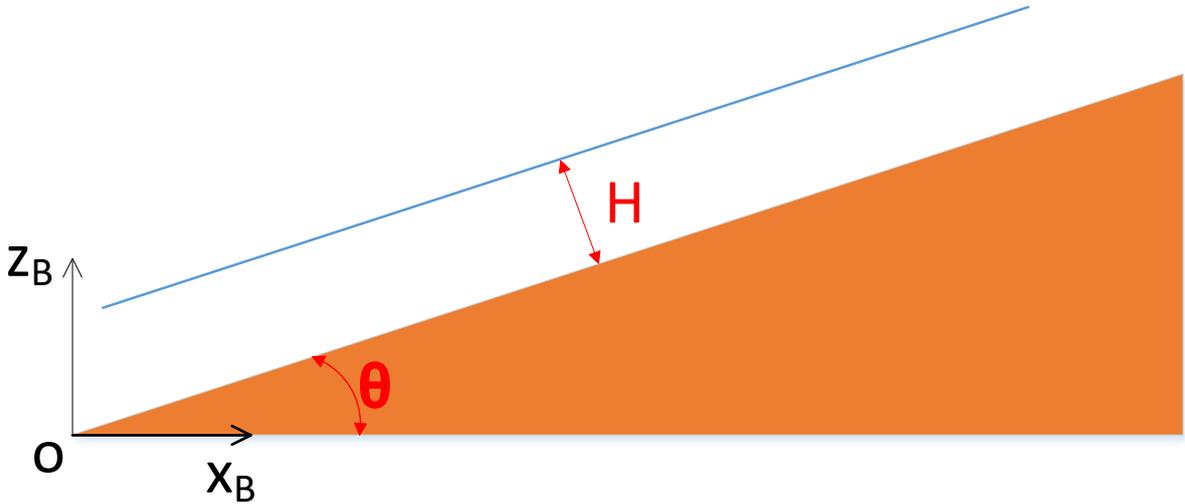
$P_{30}(^B x_{P_{30}}, ^B y_{P_{30}})$ , 目标调整点的坐标为 $O_D(^B x_{OD}, ^B y_{OD})$ , 则有:

$$S_1 = \frac{|(^B x_{P_{30}} - ^B x_{P_{20}})(^B y_{OD} - ^B y_{P_{20}}) - (^B x_{OD} - ^B x_{P_{20}})(^B y_{P_{30}} - ^B y_{P_{20}})|}{\sqrt{(^B x_{P_{30}} - ^B x_{P_{20}})^2 + (^B y_{P_{30}} - ^B y_{P_{20}})^2}}$$

$$S_2 = \frac{|(^B x_{P_{10}} - ^B x_{P_{30}})(^B y_{OD} - ^B y_{P_{30}}) - (^B x_{OD} - ^B x_{P_{30}})(^B y_{P_{10}} - ^B y_{P_{30}})|}{\sqrt{(^B x_{P_{10}} - ^B x_{P_{30}})^2 + (^B y_{P_{10}} - ^B y_{P_{30}})^2}}$$

$$S_3 = \frac{|(^B x_{P_{20}} - ^B x_{P_{10}})(^B y_{OD} - ^B y_{P_{10}}) - (^B x_{OD} - ^B x_{P_{10}})(^B y_{P_{20}} - ^B y_{P_{10}})|}{\sqrt{(^B x_{P_{20}} - ^B x_{P_{10}})^2 + (^B y_{P_{20}} - ^B y_{P_{10}})^2}}$$

(2) 期望的机架的几何中心在竖直方向的目标调整坐标 $^B z_{OD}$



希望机架的几何中心沿平行于坡面的一条直线运动, 且该直线与坡面的距离始终保持一致, 则 $^B z_{OD}$ 与 $^B x_{OD}$ 的关系为

$$^B z_{OD} = ^B x_{OD} \cdot \tan \theta + H / \cos \theta$$

其中 $H$ 为机体坐标系下的期望机架高度,  $\theta$ 为地形坡度(坡角)

### 5.5.2.2 摆动相——足端的目标调整位置

(1) 期望的抬腿高度 $h_{max}$

在参数表中已给定具体取值

(2) 计算期望的迈步距离 $S_{xi}$

在考虑落腿高度 $h_D$ 的情况下, 首先计算出单次摆腿所能施展的最大迈步距离。

定义:

$${}^F\mathbf{OQ} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} & \frac{w}{2} & 0 \\ -\frac{l}{2} & \frac{w}{2} & 0 \\ \frac{l}{2} & -\frac{w}{2} & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{w}{2} & 0 \end{bmatrix}^T = [{}^F\mathbf{OQ}_1 \quad {}^F\mathbf{OQ}_2 \quad {}^F\mathbf{OQ}_3 \quad {}^F\mathbf{OQ}_4]$$

及

$${}^B\mathbf{O}_D\mathbf{P}_0 = [{}^Bx_{P_i0} - {}^Bx_{OD} \quad {}^By_{P_i0} - {}^By_{OD} \quad {}^Bz_{P_i0} - {}^Bz_{OD}]^T$$

则

$${}^B\mathbf{Q}_i\mathbf{P}_{i0} = {}^B\mathbf{O}_D\mathbf{P}_{i0} - {}^B\mathbf{R}_D \cdot {}^F\mathbf{O}_D\mathbf{Q}_i$$

可得到单次迈腿距离的最大值

$$S_{maxi} = \sqrt{(L_1 + L_2)^2 - {}^Bz_{Q_iP_i0}^2 - {}^Bx_{Q_iP_i0}}$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$

但迈腿距离过大会导致之后支撑相时单腿的工作空间过小,使得机架的几何中心不能够调整到期望位置,所以期望的迈腿距离不能够取最大值,而应该取一个较小值,确保迈腿结束之后有较大的工作空间

$$S_{xi} = k_s \cdot S_{maxi}$$

其中 $k_s$ 为迈步距离系数

### 5.5.3 运动轨迹规划

#### 5.5.3.1 五次样条曲线介绍

设初始位置到目标位置的运动轨迹关于时间 $t$ 的函数为五次样条曲线

$$s(t) = a \cdot t^5 + b \cdot t^4 + c \cdot t^3 + d \cdot t^2 + e \cdot t + f$$

根据起始时刻( $t=0$ )和终止时刻( $t=T$ )的约束条件

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(T) = 1 \\ \dot{s}(0) = 0 \\ \dot{s}(T) = 0 \\ \ddot{s}(0) = 0 \\ \ddot{s}(T) = 0 \end{cases}$$

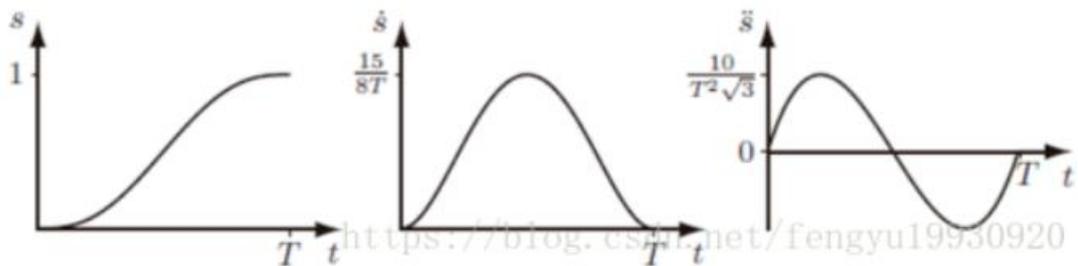
可分别求出

$$\begin{cases} a = \frac{6}{T^5} \\ b = -\frac{15}{T^4} \\ c = \frac{10}{T^3} \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

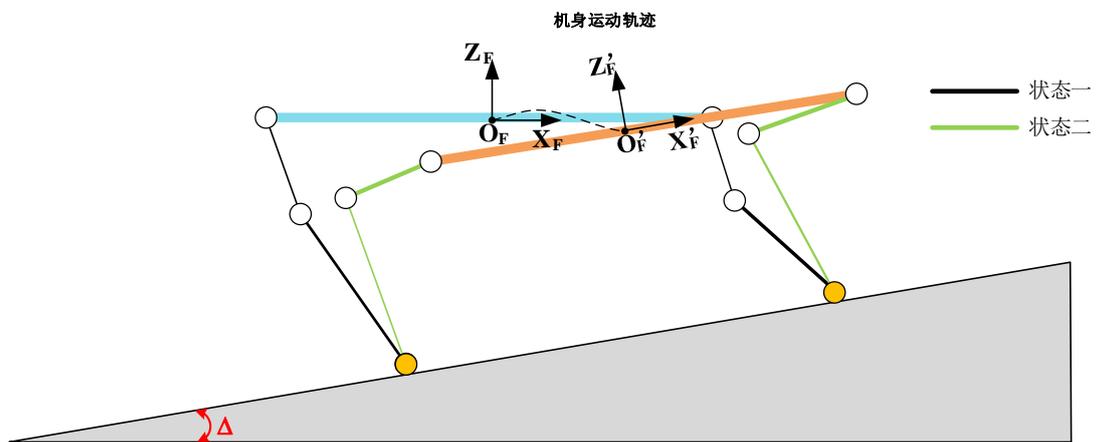
得到

$$s(t) = \frac{6 \cdot t^5}{T^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T^3}$$

作出 $s$ 的位移、速度、加速度曲线，从图中看出加速度始终是连续的，不会存在外力突变的情况



### 5.5.3.2 支撑相阶段的运动轨迹规划



根据上述推导的五次样条曲线方程，运动轨迹可具体规划如下  
机架姿态角的变化轨迹

$$\begin{cases} R(t) = (R_D - R_0) \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{su}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{su}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{su}^3} \right) + R_0 \\ P(t) = (P_D - P_0) \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{su}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{su}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{su}^3} \right) + P_0 \\ Y(t) = (Y_D - Y_0) \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{su}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{su}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{su}^3} \right) + Y_0 \end{cases}$$

机架的几何中心的运动轨迹

$$\begin{cases} {}^B x_O(t) = ({}^B x_{OD} - {}^B x_{O0}) \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{su}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{su}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{su}^3} \right) + {}^B x_{O0} \\ {}^B y_O(t) = ({}^B y_{OD} - {}^B y_{O0}) \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{su}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{su}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{su}^3} \right) + {}^B y_{O0} \\ {}^B z_O(t) = ({}^B z_{OD} - {}^B z_{O0}) \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{su}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{su}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{su}^3} \right) + {}^B z_{O0} \end{cases}$$

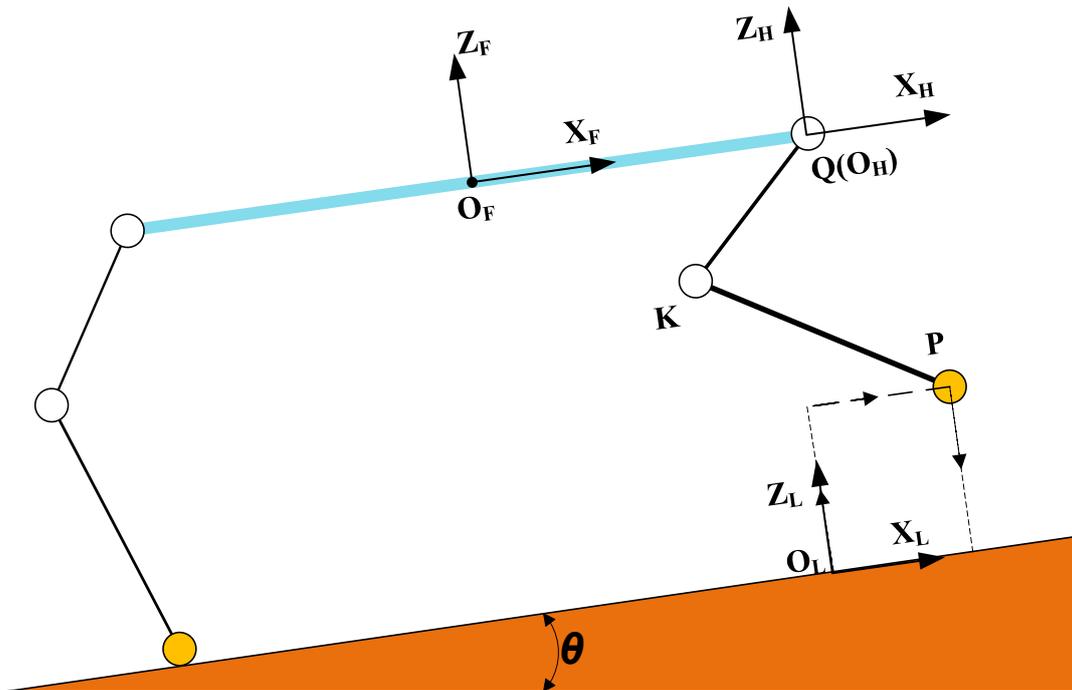
足端的运动轨迹

$$\begin{cases} {}^B x_{P_i}(t) = {}^B x_{P_i0} \\ {}^B y_{P_i}(t) = {}^B y_{P_i0} \\ {}^B z_{P_i}(t) = {}^B z_{P_i0} \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$ 。 $R_0, P_0, Y_0$ 等符号表示对应变量在支撑相开始前的初始值， $R_D, P_D, Y_D$ 等符号表示对应变量在支撑相结束时的目标值；

### 5.5.3.3 摆动相阶段的运动轨迹的规划

#### 5.5.3.3.1 摆动足的足端运动轨迹规划



为了方便计算，现在设计一个足端坐标系 $\Sigma L$ ，其坐标系固连在其摆动足在摆动相开始时

在坡面上的一点， $X_L$ 与坡面平行向前， $Z_L$ 垂直坡面向上，则足端坐标系 $\Sigma L$ 到世界坐标系的变换矩阵可确定为

$${}^B_L T = \mathbf{trans}(X_B, {}^B x_{P_{k0}}) \cdot \mathbf{trans}(Y_B, {}^B y_{P_{k0}}) \cdot \mathbf{trans}(Z_B, {}^B z_{P_{k0}}) \cdot \mathbf{Rot}(Y, \theta)$$

### ①矩形轨迹

当第 $k$ 号足摆动时,为了在前向迈腿的过程中尽量不触碰到障碍物,可将足端摆动过程分为三部分,分别为垂直抬起阶段、前向摆动阶段、垂直下落阶段

足端在足端坐标系的运动轨迹可规划如下

#### (1) 抬腿阶段

$$\begin{cases} {}^L x_{P_{k1}}(t) = 0 \\ {}^L y_{P_{k1}}(t) = 0 \\ {}^L z_{P_{k1}}(t) = h_{max} \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{(a_1 \cdot T_{sw})^5} - \frac{15 \cdot t^4}{(a_1 \cdot T_{sw})^4} + \frac{10 \cdot t^3}{(a_1 \cdot T_{sw})^3} \right) \end{cases} \quad t \leq a_1 \cdot T_{sw}$$

#### (2) 前向摆动阶段

$$\begin{cases} {}^L x_{P_{k2}}(t) = S_{xk} \cdot \left( \frac{6 \cdot (t - a_1 T_{sw})^5}{[(1 - a_2 - a_1) \cdot T_{sw}]^5} - \frac{15 \cdot (t - a_1 T_{sw})^4}{[(1 - a_2 - a_1) \cdot T_{sw}]^4} + \frac{10 \cdot (t - a_1 T_{sw})^3}{[(1 - a_2 - a_1) \cdot T_{sw}]^3} \right) \\ {}^L y_{P_{k2}}(t) = 0 \\ {}^L z_{P_{k2}}(t) = h_{max} \end{cases} \quad a_1 \cdot T_{sw} < t \leq (1 - a_2) \cdot T_{sw}$$

#### (3) 落腿阶段

$$\begin{cases} {}^L x_{P_{k3}}(t) = S_{xk} \\ {}^L y_{P_{k3}}(t) = 0 \\ {}^L z_{P_{k3}}(t) = -h_{max} \cdot \left( \frac{6 \cdot [t - (1 - a_2) \cdot T_{sw}]^5}{(a_2 \cdot T_{sw})^5} - \frac{15 \cdot [t - (1 - a_2) \cdot T_{sw}]^4}{(a_2 \cdot T_{sw})^4} + \frac{10 \cdot [t - (1 - a_2) \cdot T_{sw}]^3}{(a_2 \cdot T_{sw})^3} \right) + h_{max} \end{cases} \quad t > (1 - a_2) \cdot T_{sw}$$

其中 $a_1$ 表示抬腿阶段的时间系数， $a_2$ 表示垂直下落阶段的时间系数， $h_{max}$ 表示抬腿阶段望的抬腿高度， $S_{xk}$ 表示第 $k$ 只脚的期望的迈步距离。

### ②三角形轨迹

当第 $k$ 号足摆动时,可将足端摆动过程分为两部分,分别为抬腿阶段和落腿阶段

足端在足端坐标系的运动轨迹可规划如下

#### (1) 抬腿阶段

$$\begin{cases} {}^L x_{P_{k1}}(t) = \frac{S_{xk}}{2} \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{(a_1 \cdot T_{sw})^5} - \frac{15 \cdot t^4}{(a_1 \cdot T_{sw})^4} + \frac{10 \cdot t^3}{(a_1 \cdot T_{sw})^3} \right) \\ {}^L y_{P_{k1}}(t) = 0 \\ {}^L z_{P_{k1}}(t) = h_{max} \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{(a_1 \cdot T_{sw})^5} - \frac{15 \cdot t^4}{(a_1 \cdot T_{sw})^4} + \frac{10 \cdot t^3}{(a_1 \cdot T_{sw})^3} \right) \end{cases} \quad t \leq a_1 \cdot T_{sw}$$

### (2) 落腿阶段

$$\begin{cases} {}^L x_{P_{k2}}(t) = \frac{S_{xk}}{2} \cdot \left( \frac{6 \cdot (t - a_1 T_{sw})^5}{[(1 - a_1) \cdot T_{sw}]^5} - \frac{15 \cdot (t - a_1 T_{sw})^4}{[(1 - a_1) \cdot T_{sw}]^4} + \frac{10 \cdot (t - a_1 T_{sw})^3}{[(1 - a_1) \cdot T_{sw}]^3} \right) + \frac{S_{xk}}{2} \\ {}^L x_{P_{k2}}(t) = 0 \\ {}^L x_{P_{k2}}(t) = -h_{max} \cdot \left( \frac{6 \cdot (t - a_1 T_{sw})^5}{[(1 - a_1) \cdot T_{sw}]^5} - \frac{15 \cdot (t - a_1 T_{sw})^4}{[(1 - a_1) \cdot T_{sw}]^4} + \frac{10 \cdot (t - a_1 T_{sw})^3}{[(1 - a_1) \cdot T_{sw}]^3} \right) + h_{max} \end{cases} \quad a_1 \cdot T_{sw} < t \leq T_{sw}$$

其中 $a_1$ 表示抬腿阶段的时间系数， $h_{max}$ 表示抬腿阶段期望的抬腿高度， $S_{xk}$ 表示期望的迈步距离。

### ③椭圆形轨迹

足端在足端坐标系的运动轨迹可规划如下

$$\begin{cases} {}^L x_{P_k}(t) = S_{xk} \cdot \left[ 1 - \cos \left( \pi \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{sw}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{sw}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{sw}^3} \right) \right) \right] \\ {}^L y_{P_k}(t) = 0 \\ {}^L z_{P_k}(t) = h_{max} \cdot \sin \left( \pi \cdot \left( \frac{6 \cdot t^5}{T_{sw}^5} - \frac{15 \cdot t^4}{T_{sw}^4} + \frac{10 \cdot t^3}{T_{sw}^3} \right) \right) \end{cases} \quad t \leq T_{sw}$$

其中 $h_{max}$ 表示抬腿阶段期望的抬腿高度， $S_{xk}$ 表示期望的迈步距离。

### 5.5.3.3.2 具体运动轨迹的规划

机架姿态角的变化轨迹

$$\begin{cases} R(t) = R_0 \\ P(t) = P_0 \\ Y(t) = Y_0 \end{cases}$$

机架的几何中心的运动轨迹

$$\begin{cases} {}^B x_0(t) = {}^B x_{00} \\ {}^B y_0(t) = {}^B y_{00} \\ {}^B z_0(t) = {}^B z_{00} \end{cases}$$

摆动足（第 $k$ 号足）足端的运动轨迹

$$\begin{bmatrix} {}^B x_{P_k}(t) \\ {}^B y_{P_k}(t) \\ {}^B z_{P_k}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = {}^B_L \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} {}^L x_{P_k}(t) \\ {}^L y_{P_k}(t) \\ {}^L z_{P_k}(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

支撑足的足端运动轨迹

$$\begin{cases} {}^B x_{P_i}(t) = {}^B x_{P_i0} \\ {}^B y_{P_i}(t) = {}^B y_{P_i0} \\ {}^B z_{P_i}(t) = {}^B z_{P_i0} \end{cases}$$

(满足 $i \neq k$ 的条件下,  $i$ 取1,2,3,4中的其他三个数)

### 5.5.4 得到机体坐标系下的髋关节-足端的向量矩阵

(1) 每一时刻下的旋转矩阵

$${}^B_F \mathbf{R} = \mathbf{Rot}(Y_B, P(t))$$

(2) 机架的几何中心-足端的向量矩阵

$$\begin{aligned} {}^B \mathbf{OP} &= \begin{bmatrix} {}^B x_{P_1}(t) - {}^B x_O(t) & {}^B y_{P_1}(t) - {}^B y_O(t) & {}^B z_{P_1}(t) - {}^B z_O(t) \\ {}^B x_{P_2}(t) - {}^B x_O(t) & {}^B y_{P_2}(t) - {}^B y_O(t) & {}^B z_{P_2}(t) - {}^B z_O(t) \\ {}^B x_{P_3}(t) - {}^B x_O(t) & {}^B y_{P_3}(t) - {}^B y_O(t) & {}^B z_{P_3}(t) - {}^B z_O(t) \\ {}^B x_{P_4}(t) - {}^B x_O(t) & {}^B y_{P_4}(t) - {}^B y_O(t) & {}^B z_{P_4}(t) - {}^B z_O(t) \end{bmatrix}^T \\ &= [{}^B \mathbf{OP}_1 \quad {}^B \mathbf{OP}_2 \quad {}^B \mathbf{OP}_3 \quad {}^B \mathbf{OP}_4] \end{aligned}$$

(3) 机架的结构参数矩阵

$${}^F \mathbf{OQ} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} & \frac{w}{2} & 0 \\ -\frac{l}{2} & \frac{w}{2} & 0 \\ \frac{l}{2} & -\frac{w}{2} & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{w}{2} & 0 \end{bmatrix}^T = [{}^F \mathbf{OQ}_1 \quad {}^F \mathbf{OQ}_2 \quad {}^F \mathbf{OQ}_3 \quad {}^F \mathbf{OQ}_4]$$

其中 $l$ 表示机架的长度,  $w$ 表示机架的宽度

(4) 求得髋关节-足端的向量矩阵

$${}^B \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i = {}^B \mathbf{OP}_i - {}^B_F \mathbf{R} \cdot {}^F \mathbf{OQ}_i$$

则

$${}^F \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i = {}^B_F \mathbf{R}^{-1} \cdot {}^B \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i$$

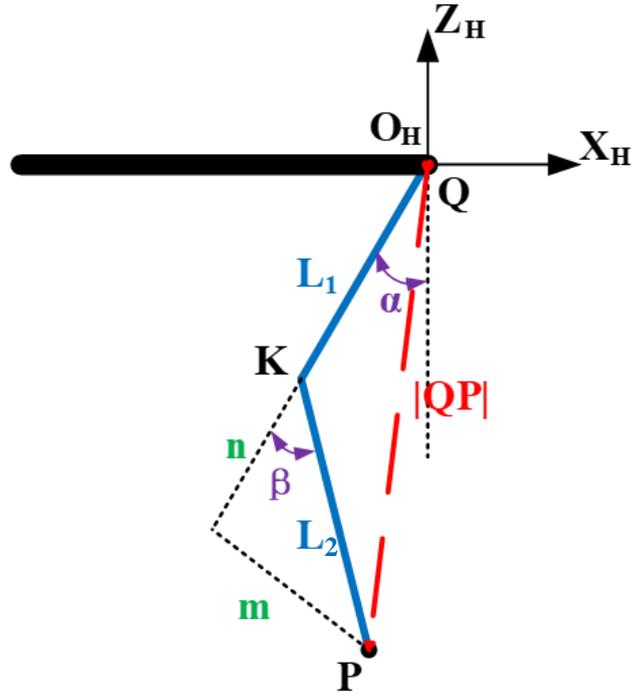
且 ${}^F \mathbf{QP}$ 也可展开

$${}^F \mathbf{QP} = [{}^F \mathbf{Q}_1 \mathbf{P}_1 \quad {}^F \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2 \quad {}^F \mathbf{Q}_3 \mathbf{P}_3 \quad {}^F \mathbf{Q}_4 \mathbf{P}_4]$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$

### 5.5.5 逆运动学求解作为驱动输入变量的关节转角

在腿部坐标系下有如下关系



存在以下的几何关系

$$|{}^FQP|^2 = (L_1 + n)^2 + m^2$$

$$L_2^2 = m^2 + n^2$$

其中 $L_1$ 、 $L_2$ 分别表示大腿连杆和小腿连杆的长度

推导得

$$n = \frac{|{}^FQP|^2 - L_2^2 - L_1^2}{2 \cdot L_1}$$

故

$$\alpha = -\tan^{-1} \left( \frac{{}^F x_{QP}}{|{}^F z_{QP}|} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{L_1 + n}{|{}^FQP|} \right)$$

$$\beta = -\cos^{-1} \left( \frac{n}{L_2} \right)$$

其中 $\alpha$ 、 $\beta$ 分别为髋关节处和膝关节处的转角

$$\text{令 } {}^FQ_iP_i = [{}^F x_i(t) \quad {}^F y_i(t) \quad {}^F z_i(t)]$$

则有

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = -\tan^{-1}\left(\frac{{}^F x_i(t)}{\sqrt{{}^F z_i^2(t)}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{{}^F x_i^2(t) + {}^F z_i^2(t) - L_2^2 + L_1^2}{2 \cdot L_1 \cdot \sqrt{{}^F x_i^2(t) + {}^F z_i^2(t)}}\right) \\ \beta_i(t) = -\cos^{-1}\left(\frac{{}^F x_i^2(t) + {}^F z_i^2(t) - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}\right) \end{cases}$$

其中  $i = 1, 2, 3, 4$

## 5.6 以转角为输入变量求各点的坐标

在模块中,若已知机器人在一个周期开始前的所有关键节点(机架的几何中心、四个足端)的初始坐标和机架的初始姿态角,当关节转角信息随时间变化时,将利用正运动学知识推出运动时每一时刻各点的位置坐标

### 5.6.1 推导相关向量矩阵和旋转矩阵

(1) 机体坐标系下的机架的结构参数矩阵

$${}^F \mathbf{OQ} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} & \frac{w}{2} & 0 \\ -\frac{l}{2} & \frac{w}{2} & 0 \\ \frac{l}{2} & -\frac{w}{2} & 0 \\ -\frac{l}{2} & -\frac{w}{2} & 0 \end{bmatrix}^T = [{}^F \mathbf{OQ}_1 \quad {}^F \mathbf{OQ}_2 \quad {}^F \mathbf{OQ}_3 \quad {}^F \mathbf{OQ}_4]$$

(2) 机体坐标系下的髌关节-膝关节的向量矩阵

令

$${}^F \mathbf{Q}_i \mathbf{K}_i = [{}^F x_{K_i}(t) \quad {}^F y_{K_i}(t) \quad {}^F z_{K_i}(t)]^T$$

由几何关系可得

$$\begin{cases} {}^F x_{K_i}(t) = -L_1 \cdot \sin(\alpha_i(t)) \\ {}^F y_{K_i}(t) = 0 \\ {}^F z_{K_i}(t) = -L_1 \cdot \cos(\beta_i(t)) \end{cases}$$

其中  $i = 1, 2, 3, 4$

则有

$${}^F \mathbf{QK} = [{}^F \mathbf{Q}_1 \mathbf{K}_1 \quad {}^F \mathbf{Q}_2 \mathbf{K}_2 \quad {}^F \mathbf{Q}_3 \mathbf{K}_3 \quad {}^F \mathbf{Q}_4 \mathbf{K}_4]$$

(3) 机体坐标系下的髌关节-足端的向量矩阵

令

$${}^F Q_i P_i = [{}^F x_{P_i}(t) \quad {}^F y_{P_i}(t) \quad {}^F z_{P_i}(t)]^T$$

由几何关系可得

$$\begin{cases} {}^F x_{P_i} = -L_1 \cdot \sin(\alpha_i(t)) - L_2 \cdot \sin(\alpha_i(t) + \beta_i(t)) \\ {}^F y_{P_i} = 0 \\ {}^F z_{P_i} = -L_1 \cdot \cos(\alpha_i(t)) - L_2 \cdot \cos(\alpha_i(t) + \beta_i(t)) \end{cases}$$

其中  $i = 1, 2, 3, 4$

则有

$${}^F QP = [{}^F Q_1 P_1 \quad {}^F Q_2 P_2 \quad {}^F Q_3 P_3 \quad {}^F Q_4 P_4]$$

还可得到

$${}^F OK = {}^F OQ + {}^F QK$$

$${}^F OP = {}^F OQ + {}^F QP$$

#### (4) 推导机体坐标系到世界坐标系的旋转矩阵

##### ① 支撑相

$${}^F P_1 P_2 = {}^F OP_2 - {}^F OP_1$$

又可知  ${}^B P_1$  和  ${}^B P_2$  在运动开始前的初始值  ${}^B P_{10}$  和  ${}^B P_{20}$

$${}^B P_1 P_2 = {}^B P_2 - {}^B P_1 = {}^B P_{20} - {}^B P_{10}$$

正常情况下，机器人机架只绕世界坐标系的 y 轴旋转，其旋转轴法向量  $\mathbf{k}$  可表示为

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其旋转角度  $\theta$  为

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{{}^F P_1 P_2 \cdot {}^B P_1 P_2}{|{}^F P_1 P_2| \cdot |{}^B P_1 P_2|} \right)$$

若旋转角度过小，趋近于零时，后面的计算结果会出现奇异值，这里需要分情况进行讨论

设置精度  $\epsilon = 10^{-5}$

(i) 若旋转角度  $\theta < \epsilon \cdot \pi$

$${}^B_F R = I$$

且可得机架的俯仰角

$$P = 0$$

(ii) 若旋转角度  $\theta > \epsilon \cdot \pi$

由 Rodrigues 公式转换得

$${}^B_F\mathbf{R} = \mathbf{I}\cos\theta + (1 - \cos\theta) \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} (k_x \quad k_y \quad k_z) + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix}$$

且可得机架的俯仰角

$$P = \tan^{-1} \left( \frac{{}^B_F\mathbf{R}(3,1)}{{}^B_F\mathbf{R}(1,1)} \right)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵且公式中的第二项不是点积，而是张量积，得到的是一个3行3列的矩阵

## ②摆动相

$${}^B_F\mathbf{R} = {}^B_F\mathbf{R}_0$$

其中 ${}^B_F\mathbf{R}_0$ 表示该旋转矩阵继承自支撑相

且可得机架的俯仰角

$$P = P_0$$

其中 $P$ 表示该俯仰角继承自支撑相

## (5) 经过旋转变换后得到在世界坐标系下的相应矩阵

$${}^B\mathbf{OQ} = {}^B_F\mathbf{R} \cdot {}^F\mathbf{OQ}$$

$${}^B\mathbf{OK} = {}^B_F\mathbf{R} \cdot {}^F\mathbf{OK}$$

$${}^B\mathbf{OP} = {}^B_F\mathbf{R} \cdot {}^F\mathbf{OP}$$

## 5.6.2 支撑相下各点的坐标

机器人足端与地面静摩擦力足够大，世界坐标系下足端坐标保持不变，机器人其他位置坐标发生变化( ${}^B\mathbf{P}_{i0}$ 为 ${}^B\mathbf{P}_i$ 在支撑相开始前的初始值)

机架的几何中心坐标

$${}^B\mathbf{O} = {}^B\mathbf{P}_{i0} - {}^B\mathbf{OP}_i$$

髋关节结点坐标

$${}^B\mathbf{Q}_i = {}^B\mathbf{P}_{i0} - {}^B\mathbf{Q}_i\mathbf{P}_i$$

膝关节结点坐标

$${}^B\mathbf{K}_i = {}^B\mathbf{P}_{i0} - {}^B\mathbf{OP}_i + {}^B\mathbf{O}_i\mathbf{K}_i$$

足端坐标

$${}^B\mathbf{P}_i = {}^B\mathbf{P}_{i0}$$

其中 $i = 1,2,3,4$

### 5.6.3 摆动相下各点的坐标

机器人机架保持静稳定，不发生晃动。若只有第  $k$  只腿在摆动，则机器人只有该腿上所有点坐标发生变化，其他位置的坐标不变( ${}^B\mathbf{O}_0$ 为 ${}^B\mathbf{O}$ 在摆动相开始前的初始值)

机架的几何中心坐标

$${}^B\mathbf{O} = {}^B\mathbf{O}_0$$

髋关节结点坐标

$${}^B\mathbf{Q}_i = {}^B\mathbf{Q}_{i0}$$

膝关节结点坐标

$$\begin{cases} {}^B\mathbf{K}_i = {}^B\mathbf{K}_{i0} \\ {}^B\mathbf{K}_k = {}^B\mathbf{O}_0 + {}^B\mathbf{O}\mathbf{K}_k \end{cases}$$

足端坐标

$$\begin{cases} {}^B\mathbf{P}_i = {}^B\mathbf{P}_{i0} \\ {}^B\mathbf{P}_k = {}^B\mathbf{O}_0 + {}^B\mathbf{O}\mathbf{P}_k \end{cases}$$

(满足 $i \neq k$ 的条件下,  $i$ 取1,2,3,4中的其他三个数)

### 5.6.4 计算大腿连杆及小腿连杆的质心坐标

若将机器人的大腿连杆和小腿连杆看作是密度分布均匀的长方体或圆柱体,则在其几何中心及小腿连杆的质心都应在其几何中心处,那么

大腿连杆质心在世界坐标系 $\Sigma B$ 下的运动轨迹坐标为

$$\begin{cases} {}^Bx_{L_1i}(t) = \frac{{}^Bx_{Q_i}(t) + {}^Bx_{K_i}(t)}{2} \\ {}^By_{L_1i}(t) = \frac{{}^By_{Q_i}(t) + {}^By_{K_i}(t)}{2} \\ {}^Bz_{L_1i}(t) = \frac{{}^Bz_{Q_i}(t) + {}^Bz_{K_i}(t)}{2} \end{cases}$$

小腿连杆质心在世界坐标系 $\Sigma B$ 下的运动轨迹坐标为

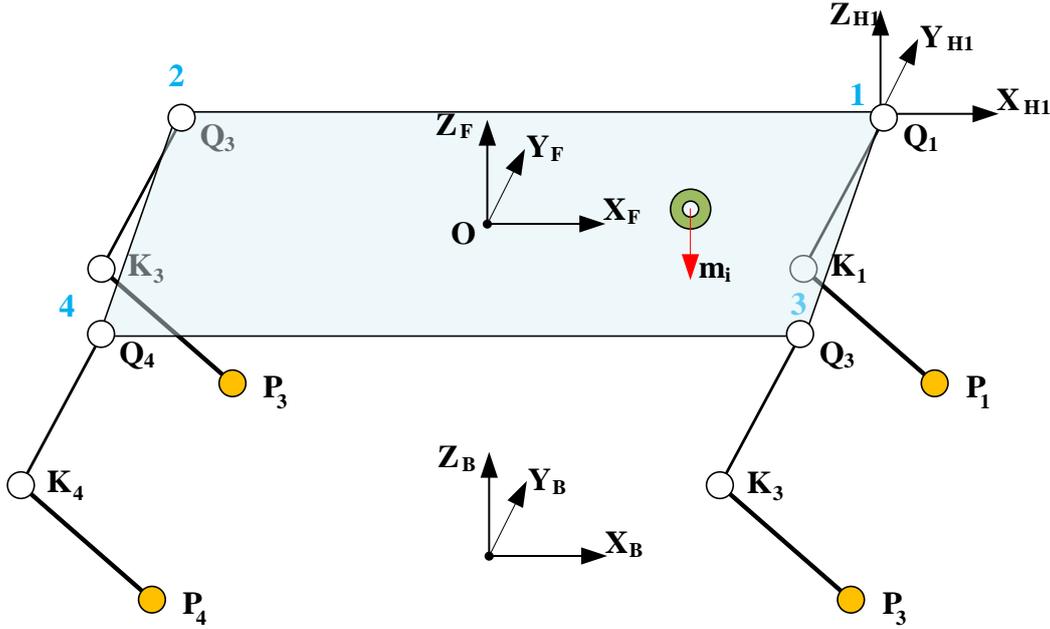
$$\begin{cases} {}^Bx_{L_2i}(t) = \frac{{}^Bx_{K_i}(t) + {}^Bx_{P_i}(t)}{2} \\ {}^By_{L_2i}(t) = \frac{{}^By_{K_i}(t) + {}^By_{P_i}(t)}{2} \\ {}^Bz_{L_2i}(t) = \frac{{}^Bz_{K_i}(t) + {}^Bz_{P_i}(t)}{2} \end{cases}$$

其中 $i = 1,2,3,4$

## 6 稳定性分析

### 6.1 零力矩点的概念

零力矩点（ZMP）理论由 Vukobratovic 等在 1972 年首先提出，ZMP 是指地面上的一点，作用于机器人的重力和惯性力所产生的合力矩在该点水平分量为 0。研究表明：在机器人运动时，若 ZMP 位于机器人足底与地面形成的支撑多边形内，将保证机器人运动过程的稳定性。



在上图所示建立的全局参考坐标系中，重力加速度为  ${}^B\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ 。假设四足机器人的总质量为  $M$ ，质心坐标为  ${}^B\mathbf{p}_c = [{}^Bx_c \ {}^By_c \ {}^Bz_c]^T$ （对时间二次求导后可得质心加速度  ${}^B\ddot{\mathbf{p}}_c = [{}^B\ddot{x}_c \ {}^B\ddot{y}_c \ {}^B\ddot{z}_c]^T$ ）；P 点为 ZMP 所在位置，坐标为  ${}^B\mathbf{p} = [{}^Bx_p \ {}^By_p \ {}^Bz_p]^T$ ；支撑点受到地面反作用力合力为  ${}^B\mathbf{f} = [{}^Bf_x \ {}^Bf_y \ {}^Bf_z]^T$ ；则地面反作用力关于世界坐标系  $\Sigma B$  坐标系原点的力矩  ${}^B\boldsymbol{\tau}$  为

$${}^B\boldsymbol{\tau} = {}^B\mathbf{p} \times {}^B\mathbf{f} + {}^B\boldsymbol{\tau}_p \quad (1)$$

式中  ${}^B\boldsymbol{\tau}_p$  为关于零力矩点的力矩。

由动量定理和角动量定理得

$${}^B\dot{\mathbf{p}} = M {}^B\mathbf{g} + {}^B\mathbf{f} \quad (2)$$

$${}^B\dot{\mathbf{L}} = {}^B\mathbf{p}_c \times M {}^B\mathbf{g} + {}^B\boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

联立式 (1) ~ (3)，消去  ${}^B\boldsymbol{\tau}$  和  ${}^B\mathbf{f}$  求得

$${}^B\boldsymbol{\tau}_p = {}^B\dot{\mathbf{L}} - {}^B\mathbf{p}_c \times M {}^B\mathbf{g} + ({}^B\dot{\mathbf{p}} - M {}^B\mathbf{g}) \times {}^B\mathbf{p} \quad (4)$$

由 ZMP 理论，令上式中的水平分量  ${}^B\tau_{px}$  和  ${}^B\tau_{py}$  为 0，解得 ZMP 位置坐标  ${}^Bx_p$  和  ${}^By_p$ ，

$$\begin{cases} {}^B x_p = \frac{M {}^B \mathbf{g} {}^B x_c + {}^B z_p {}^B \dot{\mathbf{p}}_x - {}^B \dot{\mathbf{L}}_y}{M {}^B \mathbf{g} + {}^B \dot{\mathbf{p}}_z} \\ {}^B y_p = \frac{M {}^B \mathbf{g} {}^B y_c + {}^B z_p {}^B \dot{\mathbf{p}}_y + {}^B \dot{\mathbf{L}}_x}{M {}^B \mathbf{g} + {}^B \dot{\mathbf{p}}_z} \end{cases} \quad (5)$$

式中  ${}^b z_p$  为支撑地面高度，平面时  ${}^b z_p = 0$ 。

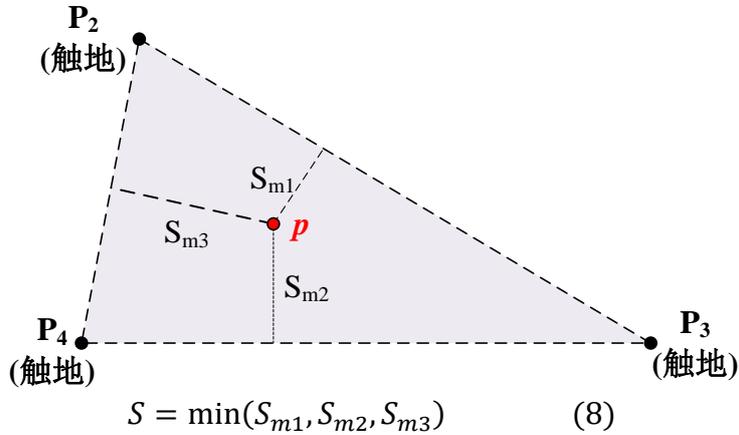
若把四足机器人简化为一个质点，则其动量和角动量分别为：

$$\begin{cases} {}^B \mathbf{P} = M {}^B \dot{\mathbf{p}}_c = M [{}^B \dot{x}_c \quad {}^B \dot{y}_c \quad {}^B \dot{z}_c]^T \\ {}^B \mathbf{L} = {}^B \mathbf{p}_c \times M {}^B \dot{\mathbf{p}}_c \end{cases} \quad (6)$$

将式 (6) 代入 (5) 中，求得 ZMP 坐标表达式为

$$\begin{cases} {}^B x_p = {}^B x_c - \frac{({}^B z_c - {}^B z_p) {}^B \ddot{x}_c}{{}^b \ddot{z}_c + {}^b \mathbf{g}} \\ {}^B y_p = {}^B y_c - \frac{({}^B z_c - {}^B z_p) {}^B \ddot{y}_c}{{}^B \ddot{z}_c + {}^B \mathbf{g}} \end{cases} \quad (7)$$

根据式 (7) 可知，若已知质心坐标  ${}^B \mathbf{p}_c$ 、支撑面高度  ${}^B z_p$ 、质心加速度  ${}^B \ddot{\mathbf{p}}_c$  等参数，即可求出 ZMP 的坐标。根据前文所求支撑多边形，可以方便地判断出机器人是否会失去稳定性。为了衡量机器人保持稳定能力的大小，采用稳定裕度 (stability margin)  $S_m$  作为标准。如图 2 所示，对于四足机器人来说，定义稳定裕度为 ZMP 距离支撑三角形边界的最短距离，即



式中  $S_{m1}, S_{m2}, S_{m3}$  分别为零力矩点 P 到支撑三角形三边的距离。

四足机器人在 walk 步态行进过程中，当 ZMP 位于支撑三角形内部时，稳定裕度取值为正；当 ZMP 落在支撑三角形外部则取值为负。稳定裕度取值越大，机器人就越稳定。由式(8)可知，当 ZMP 位于支撑三角形内心时，此时机器人稳定裕度最大。

## 6.2 具体操作说明

### 6.2.1 推导零力矩点 P 的位置

待求变量:

$$\text{零力矩点 P 的坐标 } {}^B\mathbf{p} = [{}^Bx_p \quad {}^By_p \quad {}^Bz_p]^T$$

已知参数:

- ①质心坐标  ${}^B\mathbf{p}_c = [{}^Bx_c \quad {}^By_c \quad {}^Bz_c]^T$ , 该值在每个时刻的取值都在发生变化
- ②质心加速度  ${}^B\ddot{\mathbf{p}}_c = [{}^B\ddot{x}_c \quad {}^B\ddot{y}_c \quad {}^B\ddot{z}_c]^T$ , 将质心坐标对时间 t 求二次导数可得出
- ③支撑面高度  ${}^Bz_p$ , 平面时取  ${}^Bz_p = 0$
- ④重力加速度  ${}^B\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -g]^T$ , 式中  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$

推导:

其中分量  ${}^Bz_p$  的值在已知条件中已给出, 下面通过公式求出余下两个分量  ${}^Bx_c$  和  ${}^Bz_c$  的取值

$$\begin{cases} {}^Bx_p = {}^Bx_c - \frac{({}^Bz_c - {}^Bz_p) {}^B\ddot{x}_c}{{}^B\ddot{z}_c + {}^B\mathbf{g}} \\ {}^By_p = {}^By_c - \frac{({}^Bz_c - {}^Bz_p) {}^B\ddot{y}_c}{{}^B\ddot{z}_c + {}^B\mathbf{g}} \end{cases}$$

至此可求出  ${}^B\mathbf{p} = [{}^Bx_p \quad {}^By_p \quad {}^Bz_p]^T$  里分量的所有取值

### 6.2.2 推导一周期内的平均稳定裕度

机器人由初始姿态启动, 运动一周期后停止。在这一周期内机器人的运动姿态变化可分为八个阶段 (四个支撑相阶段和四个摆动相阶段之间交替切换) 这八个阶段先后切换顺序如下:

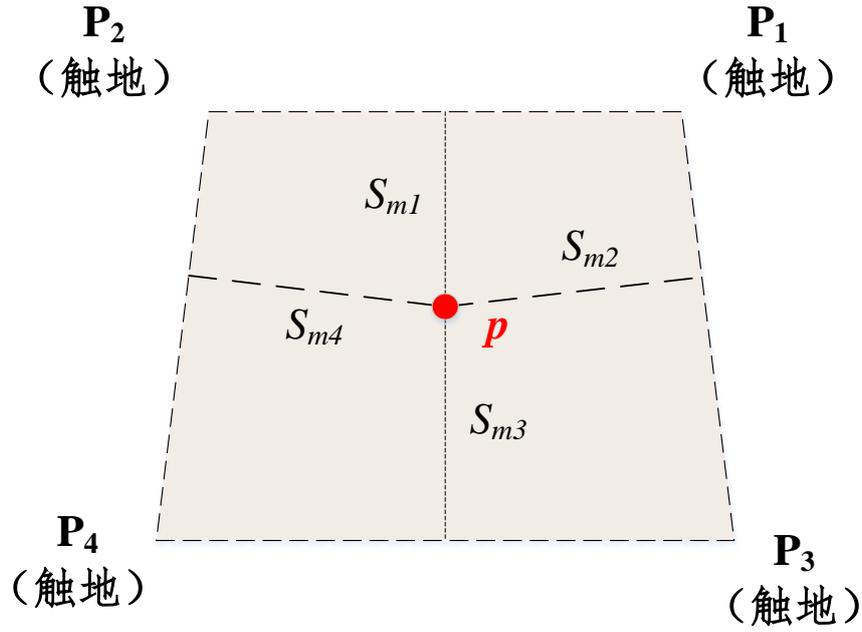
支撑相阶段 1 → 左后腿 **BL** 摆动 → 支撑相阶段 2 → 右后腿 **BR** 摆动 → 支撑相阶段 3 → 左前腿 **FL** 摆动 → 支撑相阶段 4 → 右前腿 **FR** 摆动

八个阶段均要考虑稳定裕度。

下面将按照四个摆动相阶段之间的切换顺序, 依次求出每个阶段的平均稳定裕度, 最后求出从机器人启动并运动一个完整周期后这整个周期内的平均稳定裕度

#### 6.2.2.1 四个支撑相阶段

支撑相阶段分别有四段, 每段所求的平均稳定裕度分别为  $\bar{S}_{su1}, \bar{S}_{su2}, \bar{S}_{su3}, \bar{S}_{su4}$



**6.2.2.1.1 I判断零力矩点是否在支撑四边形内部**  
 已知参数:

- ①零力矩点 P 的坐标  ${}^B\mathbf{p} = [{}^Bx_p \quad {}^By_p \quad {}^Bz_p]^T$  (该值随时间变化而变化)
- ②左前腿足端 FL 坐标  ${}^B\mathbf{P}_1 = [{}^Bx_{P_1} \quad {}^By_{P_1} \quad {}^Bz_{P_1}]^T$  (该值在运动阶段结束前保持不变)
- ③左后腿足端 BL 坐标  ${}^B\mathbf{P}_2 = [{}^Bx_{P_2} \quad {}^By_{P_2} \quad {}^Bz_{P_2}]^T$  (该值在运动阶段结束前保持不变)
- ④右前腿足端 FR 坐标  ${}^B\mathbf{P}_3 = [{}^Bx_{P_3} \quad {}^By_{P_3} \quad {}^Bz_{P_3}]^T$  (该值在运动阶段结束前保持不变)
- ⑤右后腿足端 BR 坐标  ${}^B\mathbf{P}_4 = [{}^Bx_{P_4} \quad {}^By_{P_4} \quad {}^Bz_{P_4}]^T$  (该值在运动阶段结束前保持不变)

推导:

- ①计算投影到水平地面的向量  ${}^B\mathbf{pP}_1, {}^B\mathbf{pP}_2, {}^B\mathbf{pP}_3, {}^B\mathbf{pP}_4$

$$\mathbf{pP}_1 = [{}^Bx_{P_1} - {}^Bx_p \quad {}^By_{P_1} - {}^By_p \quad 0]^T$$

$$\mathbf{pP}_2 = [{}^Bx_{P_2} - {}^Bx_p \quad {}^By_{P_2} - {}^By_p \quad 0]^T$$

- ②计算向量之间的两两叉积

$$\mathbf{a} = \mathbf{pP}_1 \times \mathbf{pP}_2$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{pP}_2 \times \mathbf{pP}_4$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{pP}_4 \times \mathbf{pP}_3$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{pP}_3 \times \mathbf{pP}_1$$

由于四个向量均位于平面上, 其竖直方向的分量z均为0, 则中间变量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 的取值应均

为标量

### 叉积的计算公式

若已知两向量 $a = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ 和 $b = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T$ ，则其叉积的结果为

$$a \times b = [y_1 z_2 - y_2 z_1 \ x_2 z_1 - x_1 z_2 \ x_1 y_2 - x_2 y_1]^T$$

### ③根据正负号判断点的内外

若中间变量 $a, b, c, d$ 的取值均为同号（均为正值或均为负值），则说明零力矩点  $P$  在四边形内部；否则在四边形外部

根据判断得出的结果决定是否继续执行之后的步骤：

(i) 若零力矩点  $P$  在支撑四边形内部，继续执行之后的步骤。

(ii) 若零力矩点  $P$  在支撑四边形外部，直接终止程序，判定成绩为不合格。

### 6.2.2.1.2 II 计算该阶段的平均稳定裕度

待求变量：

支撑相阶段的平均稳定裕度 $\bar{S}_{suj}$  ,  $j = 1, 2, 3, 4$

已知参数：

①该阶段的采样次数 $n$

②零力矩点  $P$  的坐标 ${}^B p = [{}^B x_p \ {}^B y_p \ {}^B z_p]^T$ （该值随时间变化而变化）

③左前腿足端 FL 坐标 ${}^B P_1 = [{}^B x_{P_1} \ {}^B y_{P_1} \ {}^B z_{P_1}]^T$ （该值在运动阶段结束前保持不变）

④左后腿足端 BL 坐标 ${}^B P_2 = [{}^B x_{P_2} \ {}^B y_{P_2} \ {}^B z_{P_2}]^T$ （该值在运动阶段结束前保持不变）

⑤右前腿足端 FR 坐标 ${}^B P_3 = [{}^B x_{P_3} \ {}^B y_{P_3} \ {}^B z_{P_3}]^T$ （该值在运动阶段结束前保持不变）

⑥右后腿足端 BR 坐标 ${}^B P_4 = [{}^B x_{P_4} \ {}^B y_{P_4} \ {}^B z_{P_4}]^T$ （该值在运动阶段结束前保持不变）

推导：

①第  $i$  次采样时的稳定裕度 $S_{suj}^i$

若已知直线上两点 $Q_1(x_1, y_1)$ 和 $Q_2(x_2, y_2)$ 以及直线外一点 $P(x_0, y_0)$ ，求点到直线距离

$$d = \frac{|(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

分别求零力矩点  $P$  到支撑四边形四边的距离

$$S_{m1}^i = \frac{|({}^B x_{P_1} - {}^B x_{P_2})({}^B y_p - {}^B y_{P_2}) - ({}^B x_p - {}^B x_{P_2})({}^B y_{P_1} - {}^B y_{P_2})|}{\sqrt{({}^B x_{P_1} - {}^B x_{P_2})^2 + ({}^B y_{P_1} - {}^B y_{P_2})^2}}$$

$$S_{m2}^i = \frac{|({}^B x_{P_1} - {}^B x_{P_3})({}^B y_p - {}^B y_{P_3}) - ({}^B x_p - {}^B x_{P_3})({}^B y_{P_1} - {}^B y_{P_3})|}{\sqrt{({}^B x_{P_1} - {}^B x_{P_3})^2 + ({}^B y_{P_1} - {}^B y_{P_3})^2}}$$

$$S_{m3}^i = \frac{|({}^B x_{P_3} - {}^B x_{P_4})({}^B y_p - {}^B y_{P_4}) - ({}^B x_p - {}^B x_{P_4})({}^B y_{P_3} - {}^B y_{P_4})|}{\sqrt{({}^B x_{P_3} - {}^B x_{P_4})^2 + ({}^B y_{P_3} - {}^B y_{P_4})^2}}$$

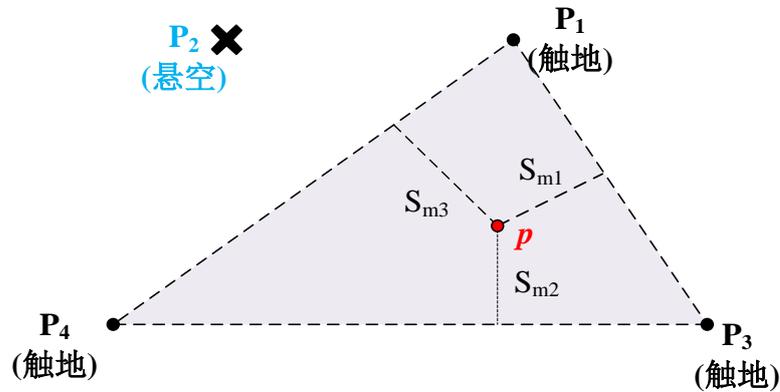
比较四个距离值的大小，从中挑选出最小值作为 ZMP 稳定裕度  $S$  的取值

$$S_{su}^i = \min(S_{m1}^i, S_{m2}^i, S_{m3}^i, S_{m4}^i)$$

②该阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{su}$

$$\bar{S}_{su} = \frac{1}{n} (S_{su}^1 + S_{su}^2 + \dots + S_{su}^n)$$

### 6.2.2.2 BL 摆动相阶段



#### 6.2.2.2.1 I 判断零力矩点是否在支撑三角形内部

已知参数：

- ①零力矩点  $P$  的坐标  ${}^B p = [{}^B x_p \quad {}^B y_p \quad {}^B z_p]^T$  (该值随时间变化而变化)
- ②左前腿足端 FL 坐标  ${}^B P_1 = [{}^B x_{P_1} \quad {}^B y_{P_1} \quad {}^B z_{P_1}]^T$  (该值在运动阶段结束前保持不变)
- ③右前腿足端 FR 坐标  ${}^B P_3 = [{}^B x_{P_3} \quad {}^B y_{P_3} \quad {}^B z_{P_3}]^T$  (该值在运动阶段结束前保持不变)
- ④右后腿足端 BR 坐标  ${}^B P_4 = [{}^B x_{P_4} \quad {}^B y_{P_4} \quad {}^B z_{P_4}]^T$  (该值在运动阶段结束前保持不变)

推导：

- ①计算投影到水平地面的向量  ${}^B pP_1$ ,  ${}^B pP_3$ ,  ${}^B pP_4$

略

.....

.....

- ②计算向量之间的两两叉积

$$a = pP_1 \times pP_2$$

$$b = pP_3 \times pP_4$$

$$c = pP_4 \times pP_1$$

由于三个向量均位于平面上，其竖直方向的分量 $z$ 均为0，则中间变量 $a, b, c$ 的取值应均为标量

### 叉积的计算公式

若已知两向量 $a = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ 和 $b = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T$ ，则其叉积的结果为

$$a \times b = [y_1 z_2 - y_2 z_1 \ x_2 z_1 - x_1 z_2 \ x_1 y_2 - x_2 y_1]^T$$

### ③根据正负号判断点的内外

若中间变量 $a, b, c$ 的取值均为同号（均为正值或均为负值），则说明零力矩点 $P$ 在三角形内部；否则在三角形外部

根据判断得出的结果决定是否继续执行之后的步骤：

(i) 若零力矩点 $P$ 在支撑三角形内部，继续执行之后的步骤。

(ii) 若零力矩点 $P$ 在支撑三角形外部，直接终止程序，判定成绩为不合格。

### 补充：

### ④计算该支撑三角形内切圆半径 $r_{BL}$

令三角形边长 $m = |P_1 P_3|$ ；

令三角形边长 $n = |P_3 P_4|$ ；

令三角形边长 $q = |P_4 P_1|$ ；

则三角形半周长 $p = \frac{m+n+q}{2}$ ；

$$r_{BL} = \frac{\sqrt{p(p-m)(p-n)(p-q)}}{p}$$

### 6.2.2.2.2 II 计算该阶段的平均稳定裕度

#### 待求变量：

BL 摆动相阶段的平均稳定裕度 $\bar{S}_{BL}$

#### 已知参数：

①该阶段的采样次数 $n$

②零力矩点 $P$ 的坐标 ${}^B p = [{}^B x_p \ {}^B y_p \ {}^B z_p]^T$ （该值随时间变化而变化）

③左前腿足端 FL 坐标 ${}^B P_1 = [{}^B x_{P_1} \ {}^B y_{P_1} \ {}^B z_{P_1}]^T$ （该值在运动阶段结束前保持不变）

④右前腿足端 FR 坐标 ${}^B P_3 = [{}^B x_{P_3} \ {}^B y_{P_3} \ {}^B z_{P_3}]^T$ （该值在运动阶段结束前保持不变）

⑤右后腿足端 BR 坐标 ${}^B P_4 = [{}^B x_{P_4} \ {}^B y_{P_4} \ {}^B z_{P_4}]^T$ （该值在运动阶段结束前保持不变）

#### 推导：

①第  $i$  次采样时的稳定裕度  $S_{BL}^i$

若已知直线上两点  $Q_1(x_1, y_1)$  和  $Q_2(x_2, y_2)$  以及直线外一点  $P(x_0, y_0)$ , 求点到直线距离

$$d = \frac{|(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

分别求零力矩点  $P$  到支撑三角形三边的距离

$$S_{m1}^i = \frac{|({}^B x_{P_3} - {}^B x_{P_1})({}^B y_p - {}^B y_{P_1}) - ({}^B x_p - {}^B x_{P_1})({}^B y_{P_3} - {}^B y_{P_1})|}{\sqrt{({}^B x_{P_3} - {}^B x_{P_1})^2 + ({}^B y_{P_3} - {}^B y_{P_1})^2}}$$

$$S_{m2}^i = \frac{|({}^B x_{P_4} - {}^B x_{P_3})({}^B y_p - {}^B y_{P_3}) - ({}^B x_p - {}^B x_{P_3})({}^B y_{P_4} - {}^B y_{P_3})|}{\sqrt{({}^B x_{P_4} - {}^B x_{P_3})^2 + ({}^B y_{P_4} - {}^B y_{P_3})^2}}$$

$$S_{m3}^i = \frac{|({}^B x_{P_1} - {}^B x_{P_4})({}^B y_p - {}^B y_{P_4}) - ({}^B x_p - {}^B x_{P_4})({}^B y_{P_1} - {}^B y_{P_4})|}{\sqrt{({}^B x_{P_1} - {}^B x_{P_4})^2 + ({}^B y_{P_1} - {}^B y_{P_4})^2}}$$

比较三个距离值的大小, 从中挑选出最小值作为 ZMP 稳定裕度  $S$  的取值

$$S_{BL}^i = \min(S_{m1}^i, S_{m2}^i, S_{m3}^i)$$

②该阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{BL}$

$$\bar{S}_{BL} = \frac{1}{n} (S_{BL}^1 + S_{BL}^2 + \dots + S_{BL}^n)$$

BR 摆动相阶段、FL 摆动相阶段、FR 摆动相阶段推导同理。

### 6.2.2.3 计算整个周期内的相对平均稳定裕度

待求变量:

整个周期内的相对平均稳定裕度  $\bar{s}$

已知参数:

- ①BL 支撑相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{su1}$
- ②BL 摆动相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{BL}$
- ③BL 阶段支撑三角形内切圆半径  $r_{BL}$
- ④BR 支撑相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{su2}$
- ⑤BR 摆动相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{BR}$
- ⑥BR 阶段支撑三角形内切圆半径  $r_{BR}$
- ⑦FL 支撑相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{su3}$
- ⑧FL 摆动相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{FL}$
- ⑨FL 阶段支撑三角形内切圆半径  $r_{FL}$
- ⑩FR 支撑相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{su4}$
- ⑪FR 摆动相阶段的平均稳定裕度  $\bar{S}_{FR}$

⑫FR 阶段支撑三角形内切圆半径 $r_{FR}$

推导:

$$\bar{s} = \frac{\left[ \frac{(\bar{S}_{SU1} + \bar{S}_{BL})}{r_{BL}} + \frac{(\bar{S}_{SU2} + \bar{S}_{BR})}{r_{BR}} + \frac{(\bar{S}_{SU3} + \bar{S}_{FL})}{r_{FL}} + \frac{(\bar{S}_{SU4} + \bar{S}_{FR})}{r_{FR}} \right]}{8}$$

意义:

$\bar{s}$ 的取值越大, 机器人的稳定性越好, 学生成绩的得分越高; 否则越低。

## 7 动力学分析

### 7.1 基本理论

#### 7.1.1 动能定理

做平面运动的刚体的动能等于随质心平移的动能与绕质心转动的动能之和

$$K = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

其中 $C$ 为刚体的质心,  $I_c$ 为刚体对质心轴的转动惯量

#### 7.1.2 虚功原理

变形体的虚功原理可表述为: 变形体处于平衡时, 在任何无限小的虚位移下, 外力所做的虚功之和等于变形体所接受的虚变形功。若以 $\delta W_e$ 表示外力虚功之和, 以 $\delta W_i$ 表示整个变形体所接受的虚变形功, 则有如下变形体虚功方程:

$$\delta W_e = \delta W_i$$

#### 7.1.3 拉格朗日方程

设 $Q_i$ 是与广义坐标 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 对应的非保守广义力,  $K$ 为系统的动能,  $P$ 为系统的势能

,  $L = K - P$ 为拉格朗日函数, 拉格朗日的第二类方程的一般形式为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

### 7.2 状态切换表

令 $Q_i$ 代表该足端处于支撑足状态(区别于上文的髋关节 $Q_i$ ), 并利用下标加以区分: Swing代表该足端处于摆动状态

	左前腿足端 $P_1$	左后腿足端 $P_2$	右前腿足端 $P_3$	右后腿足端 $P_4$
--	-------------	-------------	-------------	-------------

BL 支撑相	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
BL 摆动相	$Q_1$	Swing	$Q_2$	$Q_3$
BR 支撑相	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
BR 摆动相	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Swing
FL 支撑相	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
FL 摆动相	Swing	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
FR 支撑相	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
FR 摆动相	$Q_1$	$Q_2$	Swing	$Q_3$

### 7.3 摆动足

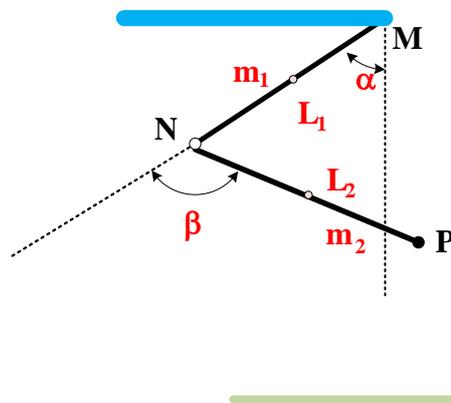
由正运动学知识求得工作空间坐标与关节空间坐标的关系

大腿连杆质心的坐标为

$$\begin{cases} x_{c1} = -\frac{L_1}{2} \sin \alpha \\ z_{c1} = -\frac{L_1}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

小腿连杆质心的坐标为

$$\begin{cases} x_{c2} = -L_1 \sin \alpha - \frac{L_2}{2} \sin (\alpha + \beta) \\ z_{c2} = -L_1 \cos \alpha - \frac{L_2}{2} \cos (\alpha + \beta) \end{cases}$$



### 7.3.1 大腿 MN 的动能和势能分别为

做平面运动的刚体的动能等于随质心平移的动能与绕质心转动的动能之和

$$K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

其中  $C$  为刚体的质心,  $I_C$  为刚体对质心轴的转动惯量

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left( \dot{\alpha} \cdot \frac{L_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \right) \dot{\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{6} m_1 L_1^2 \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

$$P_1 = m_1 g \cdot \frac{L_1}{2} \cdot (1 - \cos \alpha)$$

这里的重力加速度取  $g = 9806.65 \text{ mm/s}^2$ , 之后的取值保持一致

其中  $K_1$  是大腿 MN 的动能,  $P_1$  是大腿 MN 的势能 (区别于足端  $P_1$ )

### 7.3.2 小腿 NP 的动能和势能:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C2}^2 + \frac{1}{2} I_{C2} \omega_2^2$$

因为

$$\begin{cases} x_{C2} = -L_1 \sin \alpha - \frac{L_2}{2} \sin(\alpha + \beta) \\ z_{C2} = -L_1 \cos \alpha - \frac{L_2}{2} \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

推得

$$\begin{cases} \dot{x}_{C2} = -L_1 \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} - \frac{L_2}{2} \cos(\alpha + \beta) \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ \dot{z}_{C2} = L_1 \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} + \frac{L_2}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} v_{C2}^2 &= \dot{x}_{C2}^2 + \dot{z}_{C2}^2 \\ &= \left[ -L_1 \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} - \frac{L_2}{2} \cos(\alpha + \beta) \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \right]^2 + \left[ L_1 \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} + \frac{L_2}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \right]^2 \\ &= L_1^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{L_2^2}{4} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 + L_1 L_2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}) \cos \beta \end{aligned}$$

$$= \left( L_1^2 + \frac{L_2^2}{4} + L_1 L_2 \cos \beta \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{L_2^2}{4} \dot{\beta}^2 + \left( \frac{L_2^2}{2} + L_1 L_2 \cos \beta \right) \dot{\alpha} \dot{\beta}$$

故

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_{C2}^2 + \frac{1}{2} I_{C2} \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left[ \left( L_1^2 + \frac{L_2^2}{4} + L_1 L_2 \cos \beta \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{L_2^2}{4} \dot{\beta}^2 + \left( \frac{L_2^2}{2} + L_1 L_2 \cos \beta \right) \dot{\alpha} \dot{\beta} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m_2 L_2^2 \right) (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \\ &= \frac{1}{24} m_2 \left[ 12 L_1^2 \dot{\alpha}^2 + 12 L_1 L_2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}) \cos \beta + 4 L_2^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left[ \left( L_1^2 + \frac{L_2^2}{3} + L_1 L_2 \cos \beta \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{L_2^2}{3} \dot{\beta}^2 + \left( \frac{2}{3} L_2^2 + L_1 L_2 \cos \beta \right) \dot{\alpha} \dot{\beta} \right] \end{aligned}$$

$$P_2 = m_2 g \left[ L_1 (1 - \cos \alpha) + \frac{L_2}{2} (1 - \cos(\alpha + \beta)) \right]$$

其中 $K_2$ 是小腿 NP 的动能， $P_2$ 是小腿 NP 的势能（区别于足端 $P_2$ ）

### 7.3.3 拉格朗日量：

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ &= K_1 + K_2 - P_1 - P_2 \\ &= \frac{1}{6} m_1 L_1^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{24} m_2 \left[ 12 L_1^2 \dot{\alpha}^2 + 12 L_1 L_2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}) \cos \beta + 4 L_2^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \right] \\ &\quad - m_1 g L_1 (1 - \cos \alpha) - m_2 g \left[ L_1 (1 - \cos \alpha) + \frac{L_2}{2} (1 - \cos(\alpha + \beta)) \right] \\ &= \left( \frac{1}{6} m_1 L_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos \beta + \frac{1}{6} m_2 L_2^2 \right) \dot{\alpha}^2 + \left( \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos \beta + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \right) \dot{\alpha} \dot{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{6} m_2 L_2^2 \dot{\beta}^2 - m_1 g L_1 (1 - \cos \alpha) - m_2 g \left[ L_1 (1 - \cos \alpha) + \frac{L_2}{2} (1 - \cos(\alpha + \beta)) \right] \end{aligned}$$

其中 $L$ 是拉格朗日量（区别于上文的角动量 $L$ ）

### 7.3.4 力矩：

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} \\ \tau_2 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} \end{aligned}$$

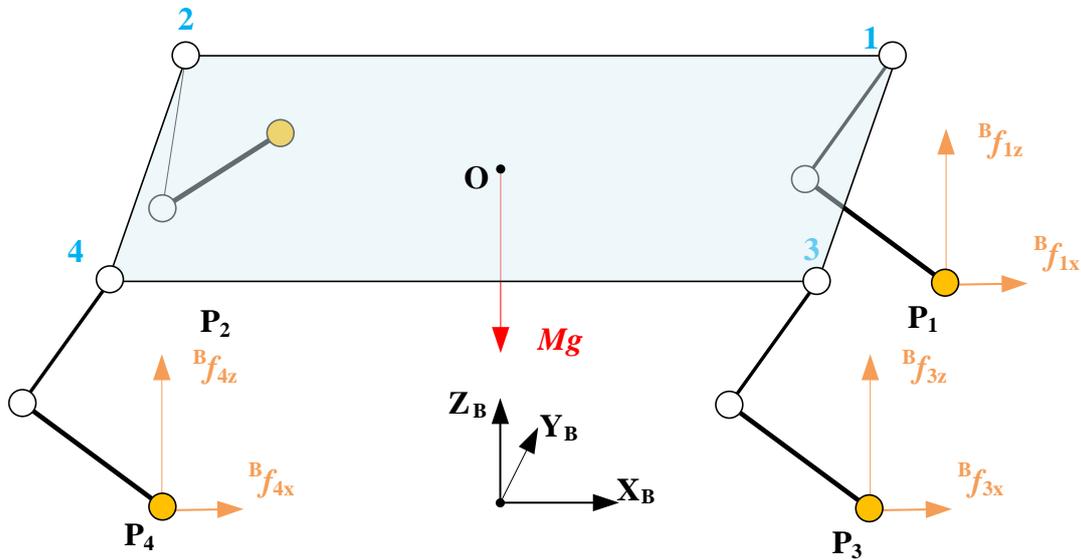
整理得

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left( \frac{1}{3} m_1 L_1^2 + m_2 L_1^2 + m_2 L_1 L_2 \cos \beta + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \right) \ddot{\alpha} + \left( \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos \beta + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \right) \ddot{\beta} \\ &\quad - m_2 L_1 L_2 \sin \beta \cdot \dot{\alpha} \dot{\beta} - \frac{1}{2} L_1 L_2 \sin \beta \cdot \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_1 g L_1 \sin \alpha + m_2 g \left( L_1 \sin \alpha + \frac{1}{2} L_2 \sin(\alpha + \beta) \right) \\ \tau_2 &= \left( \frac{1}{3} m_2 L_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos \beta \right) \ddot{\alpha} + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \cdot \ddot{\beta} + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \sin \beta \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

## 7.4 支撑足

### 7.4.1 三足支撑状态

以 BL 摆动相中三足支撑状态为例，其中 2 号足摆动，其他三条腿均支撑触地，其与地面接触力矢量在世界坐标系中可表示为  ${}^B \mathbf{f}_i = [{}^B f_{ix} \quad 0 \quad {}^B f_{iz}]^T$ ，其中  $i = 1, 3, 4$ 。共有 6 个分量需要求解



#### 7.4.1.1 建立引入摩擦约束条件后的接触力平衡方程并求解

①整个系统的受力/力矩平衡方程

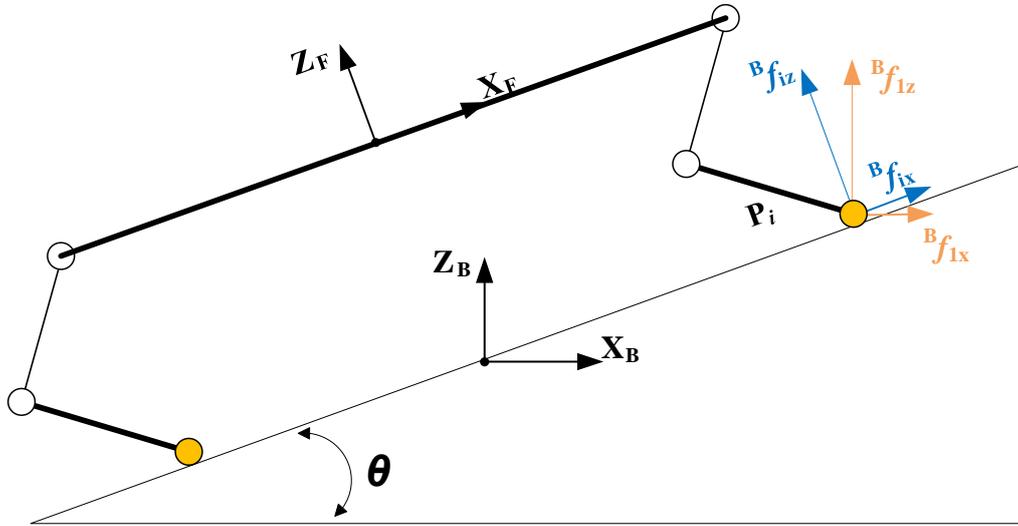
$$\begin{cases} \sum {}^B F_z = 0 \\ \sum {}^B M_x = 0 \\ \sum {}^B M_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

②引入摩擦约束条件

$$\begin{cases} {}^F f_{1x} = \mu \cdot {}^F f_{1z} \\ {}^F f_{3x} = \mu \cdot {}^F f_{3z} \\ {}^F f_{4x} = \mu \cdot {}^F f_{4z} \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\mu$  是静摩擦系数，这里取  $\mu = 0.1$

需要注意的是，这里给出的摩擦约束条件是建立在机体坐标系下的，要和平衡方程联立求解，需要统一参考坐标系



由力的合成与分解

$$\begin{aligned} F_{f_{ix}} &= B f_{ix} \cos \theta + B f_{iz} \sin \theta \\ F_{f_{iz}} &= -B f_{ix} \sin \theta + B f_{iz} \cos \theta \end{aligned}$$

其中这里的 $\theta$ 是坡角

代入式 (2) 中，联立得到关系

$$B f_{ix} = \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \cdot B f_{iz}$$

令系数 $M = \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$ ，并将上式展开得

$$\begin{cases} B f_{1x} = M \cdot B f_{1z} \\ B f_{3x} = M \cdot B f_{3z} \\ B f_{4x} = M \cdot B f_{4z} \end{cases} \quad (3)$$

③将式 (1) 展开，并和式 (3) 进行联立

$$\begin{cases} B f_{1z} + B f_{3z} + B f_{4z} - Mg = 0 \\ B y_{P_1} B f_{1z} + B y_{P_3} B f_{3z} + B y_{P_4} B f_{4z} - B y_C Mg = 0 \\ (B z_{P_1} B f_{1x} - B x_{P_1} B f_{1z}) + (B z_{P_3} B f_{3x} - B x_{P_3} B f_{3z}) + (B z_{P_4} B f_{4x} - B x_{P_4} B f_{4z}) + B x_C \cdot Mg = 0 \\ B f_{1x} = M \cdot B f_{1z} \\ B f_{3x} = M \cdot B f_{3z} \\ B f_{4x} = M \cdot B f_{4z} \end{cases}$$

这样便拥有 6 个独立方程，可以求解这 6 个未知变量

### 7.4.1.2 转换为关节力矩

解得世界坐标系下各足端接触力 $B \mathbf{f}_i = [B f_{ix} \quad 0 \quad B f_{iz}]^T$ 后，利用下列关系式

$${}^F f_{ix} = {}^B f_{ix} \cos \theta + {}^B f_{iz} \sin \theta$$

$${}^F f_{iz} = -{}^B f_{ix} \sin \theta + {}^B f_{iz} \cos \theta$$

转换成机体坐标系下各足端接触力  ${}^F \mathbf{f}_i = [{}^F f_{ix} \quad 0 \quad {}^F f_{iz}]^T$ ,

为了将机体坐标系中足端接触力  ${}^F \mathbf{f}_i = [{}^F f_{ix} \quad 0 \quad {}^F f_{iz}]^T$  映射成关节空间 (Joint Space) 的关节力矩, 首先需求得 *Jacobian* 矩阵

其中  $J$  为 *Jacobian* 矩阵, 在此模型中其取值为:

$$J = \begin{bmatrix} -L_2 \cos(\alpha_i + \beta_i) - L_1 \cos \alpha_i & -L_2 \cos(\alpha_i + \beta_i) \\ 0 & 0 \\ L_2 \sin(\alpha_i + \beta_i) + L_1 \sin \alpha_i & L_2 \sin(\alpha_i + \beta_i) \end{bmatrix}$$

根据虚功原理, 可以得到:

$$\boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} + (-{}^F \mathbf{f}_i)^T \delta \mathbf{x} = 0$$

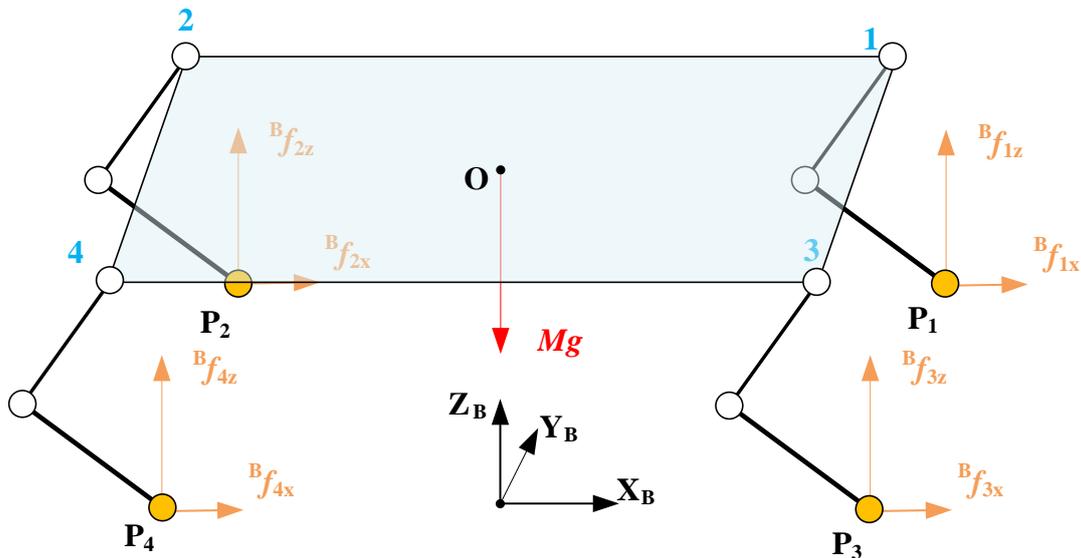
其中,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_\alpha \quad \tau_\beta]^T$  为关节力矩列向量,  ${}^F \mathbf{f}_i = [{}^F f_{ix} \quad 0 \quad {}^F f_{iz}]^T$  为外部作用力。根据可以得到外部作用力和关节力矩之间的关系:

$$\boldsymbol{\tau} = J^T {}^F \mathbf{f}_i$$

## 7.4.2 四足支撑状态

四足支撑状态中四条腿均支撑触地, 其与地面接触力矢量在世界坐标系中可表示为

${}^B \mathbf{f}_i = [{}^B f_{ix} \quad 0 \quad {}^B f_{iz}]^T$ , 其中  $i = 1, 2, 3, 4$ 。共有 8 个分量需要求解



### 7.4.2.1 建立引入摩擦约束条件和目标函数后的接触力平衡方程并求解

① 整个系统的受力/力矩平衡方程

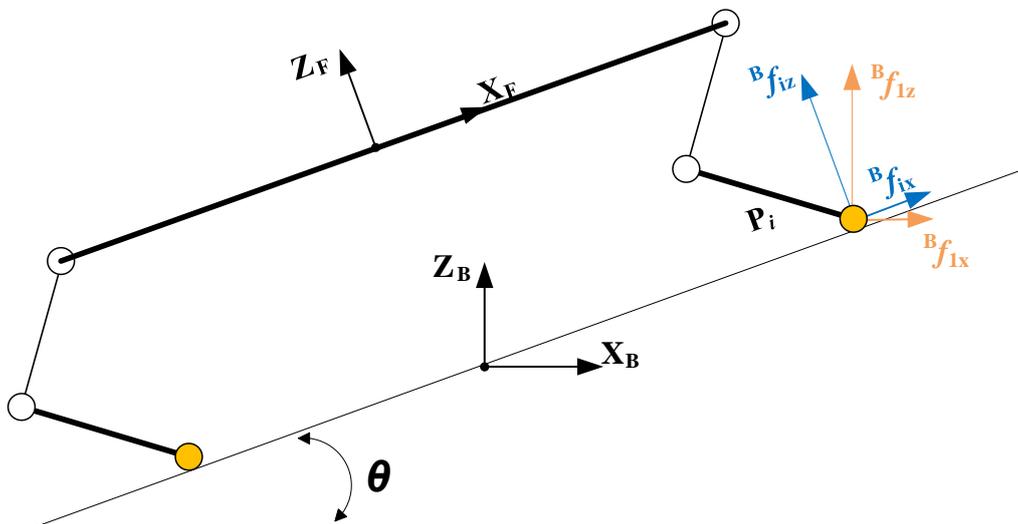
$$\begin{cases} \sum B F_z = 0 \\ \sum B M_x = 0 \\ \sum B M_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

②引入摩擦约束条件

$$\begin{cases} F f_{1x} = \mu \cdot F f_{1z} \\ F f_{2x} = \mu \cdot F f_{2z} \\ F f_{3x} = \mu \cdot F f_{3z} \\ F f_{4x} = \mu \cdot F f_{4z} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\mu$ 是静摩擦系数，这里取 $\mu = 0.1$

需要注意的是，这里给出的摩擦约束条件是建立在机体坐标系下的，要和平衡方程联立求解，需要统一参考坐标系



由力的合成与分解

$$\begin{aligned} F f_{ix} &= B f_{ix} \cos \theta + B f_{iz} \sin \theta \\ F f_{iz} &= -B f_{ix} \sin \theta + B f_{iz} \cos \theta \end{aligned}$$

其中这里的 $\theta$ 是坡角

代入式(2)中，联立得到关系

$$B f_{ix} = \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \cdot B f_{iz}$$

令系数 $M = \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$ ，并将上式展开得

$$\begin{cases} {}^B f_{1x} = M \cdot {}^B f_{1z} \\ {}^B f_{2x} = M \cdot {}^B f_{2z} \\ {}^B f_{3x} = M \cdot {}^B f_{3z} \\ {}^B f_{4x} = M \cdot {}^B f_{4z} \end{cases} \quad (3)$$

③引入一个目标函数，设计该目标函数能使得求解后得到的四个竖直方向的接触力彼此之间相差程度最小，以避免某一只腿承受过大接触力的情况，该目标函数的表达式为

$$\Phi = \min \left( ({}^B f_{1z} - {}^B f_{2z})^2 + ({}^B f_{2z} - {}^B f_{3z})^2 + ({}^B f_{3z} - {}^B f_{4z})^2 + ({}^B f_{4z} - {}^B f_{1z})^2 \right) \quad (4)$$

④将式（1）展开，并和式（3）（4）进行联立

$$\begin{cases} {}^B f_{1z} + {}^B f_{2z} + {}^B f_{3z} + {}^B f_{4z} - Mg = 0 \\ {}^B y_{P_1} {}^B f_{1z} + {}^B y_{P_2} {}^B f_{2z} + {}^B y_{P_3} {}^B f_{3z} + {}^B y_{P_4} {}^B f_{4z} - {}^B y_C Mg = 0 \\ ({}^B z_{P_1} {}^B f_{1x} - {}^B x_{P_1} {}^B f_{1z}) + ({}^B z_{P_2} {}^B f_{2x} - {}^B x_{P_2} {}^B f_{2z}) + ({}^B z_{P_3} {}^B f_{3x} - {}^B x_{P_3} {}^B f_{3z}) + ({}^B z_{P_4} {}^B f_{4x} - {}^B x_{P_4} {}^B f_{4z}) + \\ {}^B f_{1x} = M \cdot {}^B f_{1z} \\ {}^B f_{2x} = M \cdot {}^B f_{2z} \\ {}^B f_{3x} = M \cdot {}^B f_{3z} \\ {}^B f_{4x} = M \cdot {}^B f_{4z} \\ \Phi = \min \left( ({}^B f_{1z} - {}^B f_{2z})^2 + ({}^B f_{2z} - {}^B f_{3z})^2 + ({}^B f_{3z} - {}^B f_{4z})^2 + ({}^B f_{4z} - {}^B f_{1z})^2 \right) \end{cases}$$

这样便拥有 7 个独立方程加一个目标函数约束，能求解 8 个未知变量

#### 7.4.2.2 转换为关节力矩

解得世界坐标系下各足端接触力  ${}^B \mathbf{f}_i = [{}^B f_{ix} \quad 0 \quad {}^B f_{iz}]^T$  后，利用下列关系式

$${}^F f_{ix} = {}^B f_{ix} \cos \theta + {}^B f_{iz} \sin \theta$$

$${}^F f_{iz} = -{}^B f_{ix} \sin \theta + {}^B f_{iz} \cos \theta$$

转换成机体坐标系下各足端接触力  ${}^F \mathbf{f}_i = [{}^F f_{ix} \quad 0 \quad {}^F f_{iz}]^T$ ,

为了将机体坐标系中足端接触力  ${}^F \mathbf{f}_i = [{}^F f_{ix} \quad 0 \quad {}^F f_{iz}]^T$  映射成关节空间（Joint Space）的关节力矩，首先需求得 *Jacobian* 矩阵

其中  $J$  为 *Jacobian* 矩阵，在此模型中其取值为：

$$J = \begin{bmatrix} -L_2 \cos(\alpha_i + \beta_i) - L_1 \cos \alpha_i & -L_2 \cos(\alpha_i + \beta_i) \\ 0 & 0 \\ L_2 \sin(\alpha_i + \beta_i) + L_1 \sin \alpha_i & L_2 \sin(\alpha_i + \beta_i) \end{bmatrix}$$

根据虚功原理，可以得到：

$$\boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} + (-{}^F \mathbf{f}_i)^T \delta \mathbf{x} = 0$$

其中， $\boldsymbol{\tau} = [\tau_\alpha \quad \tau_\beta]^T$  为关节力矩列向量， ${}^F \mathbf{f}_i = [{}^F f_{ix} \quad 0 \quad {}^F f_{iz}]^T$  为外部作用力。根据可以得到外部作用力和关节力矩之间的关系：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{f}_i$$

## 8 综合评分

成绩由 2 部分构成，其中关于公式的选择或填空部分占比 60%，每题可设置 5 分；另外 40%由最终稳定裕度给出。

### 注意事项：

1) 该成绩给出的前提是机器人在行走过程中不发生倾倒，若发生倾倒，就提示学生从仪器选择及布置那步开始，从新进行。

2) 考虑到整体过程延续性，在学生做选择或填空题时，由做错的情况，针对做错的情况，软件只需要扣除对应的分数，但后台计算时，仍按正确的方式去计算。